

IB112 Základy matematiky

Základy kombinatoriky a kombinatorická pravděpodobnost

Jan Strejček

- *Výběry prvků bez opakování*
 - permutace a faktoriál
 - variace
 - kombinace a kombinační čísla
- *Výběry prvků s opakováním*
 - permutace
 - variace
 - kombinace
- *Obecné principy počítání složených výběrů*
 - princip nezávislých výběrů
 - princip dvojího počítání
- *Kombinatorická pravděpodobnost*
 - konečný pravděpodobnostní prostor
 - nezávislost jevů a podmíněná pravděpodobnost
 - střední hodnota

Výběry prvků bez opakování

Permutace bez opakování

Definice (Permutace bez opakování)

*Necht' M je konečná množina o n prvcích. **Permutace** množiny M je uspořádaná posloupnost všech prvků z M .*

Příklad

- Vypište všechny permutace množiny $\{a, b, c, d\}$.

Permutace bez opakování

Definice (Permutace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích. **Permutace** množiny M je uspořádaná posloupnost všech prvků z M .

Příklad

- Vypište všechny permutace množiny $\{a, b, c, d\}$.

(a, b, c, d)

(b, a, c, d)

(c, a, b, d)

(d, a, b, c)

(a, b, d, c)

(b, a, d, c)

(c, a, d, b)

(d, a, c, b)

(a, c, b, d)

(b, c, a, d)

(c, b, a, d)

(d, b, a, c)

(a, c, d, b)

(b, c, d, a)

(c, b, d, a)

(d, b, c, a)

(a, d, b, c)

(b, d, a, c)

(c, d, a, b)

(d, c, a, b)

(a, d, c, b)

(b, d, c, a)

(c, d, b, a)

(d, c, b, a)

Věta

Počet všech permutací n -prvkové množiny je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Funkce $n!$ se nazývá *faktoriál*. Klademe $0! = 1$.

Příklad

- Kolik způsoby lze v ruce uspořádat 7 karet?

Věta

Počet všech permutací n -prvkové množiny je

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1.$$

- Funkce $n!$ se nazývá *faktoriál*. Klademe $0! = 1$.

Příklad

- Kolik způsoby lze v ruce uspořádat 7 karet?
- Odpověď je $7! = 5\,040$.

Definice (Variace bez opakování)

*Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k -prvkovou **variací** na množině M rozumíme uspořádanou k -tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.*

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové variace na množině $\{a, b, c, d\}$.

Definice (Variace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k -prvkovou **variací** na množině M rozumíme uspořádanou k -tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše jednou.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové variace na množině $\{a, b, c, d\}$.

(a, b)	(b, a)	(c, a)	(d, a)
(a, c)	(b, c)	(c, b)	(d, b)
(a, d)	(b, d)	(c, d)	(d, c)

Věta

Počet všech k -prvkových variací na množině s n prvky je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

- Permutace množiny s n prvky je totéž jako n -prvková variace.
- Na množině s n prvky je vždy stejně n -prvkových variací jako $(n-1)$ -prvkových variací. (Proč?)

Příklad

- Kolik trojčíslic lze sestavit z číslic $1, 2, \dots, 9$, jestliže se žádné číslice neopakují?

Věta

Počet všech k -prvkových variací na množině s n prvky je

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1).$$

- Permutace množiny s n prvky je totéž jako n -prvková variace.
- Na množině s n prvky je vždy stejně n -prvkových variací jako $(n-1)$ -prvkových variací. (Proč?)

Příklad

- Kolik trojčiferných čísel lze sestavit z číslic $1, 2, \dots, 9$, jestliže se žádné číslice neopakují?
- Odpověď je $\frac{9!}{6!} = 504$.

Definice (Kombinace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k -prvkovou kombinací na množině M rozumíme k -prvkovou podmnožinu množiny M .

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

Definice (Kombinace bez opakování)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo splňující $k \leq n$. k -prvkovou **kombinací** na množině M rozumíme k -prvkovou podmnožinu množiny M .

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{c, d\}$	$\{d, e\}$
$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, e\}$	
$\{a, d\}$	$\{b, e\}$		
$\{a, e\}$			

Věta

Počet všech k -prvkových kombinací na množině s n prvky je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Čísla $\binom{n}{k}$ se nazývají **kombinační čísla** nebo **binomické koeficienty**.
- k -prvková kombinace se někdy popisuje jako neuspořádaný výběr k prvků.

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout tah Sportky (6 čísel z 49)?

Věta

Počet všech k -prvkových kombinací na množině s n prvky je

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

- Čísla $\binom{n}{k}$ se nazývají **kombinační čísla** nebo **binomické koeficienty**.
- k -prvková kombinace se někdy popisuje jako neuspořádaný výběr k prvků.

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout tah Sportky (6 čísel z 49)?
- Odpověď je $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$.

Výběry prvků s opakováním

Definice (Permutace s opakováním)

Nechť M je konečná množina. *Permutace s opakováním* je uspořádaná posloupnost prvků z M , v níž se každý prvek $i \in M$ vyskytuje k_i -krát, kde k_i je předem dané.

Příklad

- Vypište všechny permutace s opakováním množiny $\{a, b\}$ pro $k_a = 2$ a $k_b = 3$.

Definice (Permutace s opakováním)

Necht' M je konečná množina. *Permutace s opakováním* je uspořádaná posloupnost prvků z M , v níž se každý prvek $i \in M$ vyskytuje k_i -krát, kde k_i je předem dané.

Příklad

- Vypište všechny permutace s opakováním množiny $\{a, b\}$ pro $k_a = 2$ a $k_b = 3$.

(a, a, b, b, b)	(b, a, b, a, b)
(a, b, a, b, b)	(b, a, b, b, a)
(a, b, b, a, b)	(b, b, a, a, b)
(a, b, b, b, a)	(b, b, a, b, a)
(b, a, a, b, b)	(b, b, b, a, a)

Věta

Počet permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ pro dané počty opakování $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ je

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Příklad

- Kolika způsoby lze navléct na provázek 30 červených, 10 modrých a 3 žluté korále?

Věta

Počet permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ pro dané počty opakování $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ je

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Příklad

- Kolika způsoby lze navléct na provázek 30 červených, 10 modrých a 3 žluté korále?
- Odpověď je $\frac{(30 + 10 + 3)!}{30! \cdot 10! \cdot 3!} = 10\,460\,978\,576\,048.$

Definice (Variace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k -prvkovou **variací s opakováním** na množině M rozumíme uspořádanou k -tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k -krát.

Příklad

- Vypište všechny 4-prvkové variace s opakováním na množině $\{a, b\}$.

Variace s opakováním

Definice (Variace s opakováním)

Necht' M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k -prvkovou **variací s opakováním** na množině M rozumíme uspořádanou k -tici sestavenou z prvků z M tak, že se v ní každý prvek vyskytuje nejvýše k -krát.

Příklad

- Vypište všechny 4-prvkové variace s opakováním na množině $\{a, b\}$.

(a, a, a, a)

(a, b, a, a)

(b, a, a, a)

(b, b, a, a)

(a, a, a, b)

(a, b, a, b)

(b, a, a, b)

(b, b, a, b)

(a, a, b, a)

(a, b, b, a)

(b, a, b, a)

(b, b, b, a)

(a, a, b, b)

(a, b, b, b)

(b, a, b, b)

(b, b, b, b)

Věta

Počet všech k -prvkových variací s opakováním na množině s n prvky je

$$n^k.$$

Příklad

- Kolik podmnožin má množina $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$?

Věta

Počet všech k -prvkových variací s opakováním na množině s n prvky je

$$n^k.$$

Příklad

- Kolik podmnožin má množina $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$?
- Odpověď je $2^{10} = 1\,024$.
- Podmnožinu lze kódovat jako uspořádanou 10-tici nul a jedniček (jedničky značí, které prvky jsou v podmnožině):
 $\{2, 5, 6\}$ odpovídá $(0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$
- Hledáme tedy všechny 10-prvkové variace s opakováním na množině $\{0, 1\}$.

Definice (Kombinace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k -prvkovou kombinací s opakováním na množině M rozumíme neuspořádanou k -tici prvků z M , kde se každý prvek vyskytuje libovolněkrát.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace s opakováním na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

Definice (Kombinace s opakováním)

Nechť M je konečná množina o n prvcích a $k > 0$ je přirozené číslo. k -prvkovou **kombinací s opakováním** na množině M rozumíme neuspořádanou k -tici prvků z M , kde se každý prvek vyskytuje libovolněkrát.

Příklad

- Vypište všechny 2-prvkové kombinace s opakováním na množině $\{a, b, c, d, e\}$.

$\{a, a\}$	$\{b, b\}$	$\{c, c\}$	$\{d, d\}$	$\{e, e\}$
$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{c, d\}$	$\{d, e\}$	
$\{a, c\}$	$\{b, d\}$	$\{c, e\}$		
$\{a, d\}$	$\{b, e\}$			
$\{a, e\}$				

Věta

Počet všech k -prvkových kombinací na množině s n prvky je

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

- k -prvkovou kombinaci na množině $\{1, 2, \dots, n\}$ lze zakódovat do posloupnosti délky $n+k$ tak, že prvky množiny napíšeme do řady a za každý prvek vložíme tolik znaků \square , kolikrát je prvek obsažen v kombinaci. Např. kombinace $\{2, 2, 3\}$ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ odpovídá posloupnosti $1 \ 2 \ \square \ \square \ 3 \ \square \ 4$.
- Posloupnost je přesně určena umístěním znaků \square .
- Znak \square se nesmí vyskytnout na prvním místě.
- k znaků \square se tedy vyskytuje na některých z $n+k-1$ míst.
- Posloupností (a tedy i kombinací) je celkem $\binom{n+k-1}{k}$.

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout hod třemi hracími kostkami?
(Zajímá nás, co kolikrát padne: např. dvě trojky a jedna pětka).

Příklad

- Kolika způsoby může dopadnout hod třemi hracími kostkami? (Zajímá nás, co kolikrát padne: např. dvě trojky a jedna pětka).
- Odpověď je $\binom{6+3-1}{3} = 56$.
- Jedná se o 3-prvkové kombinace s opakováním nad množinou $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Obecné principy počítání složených výběrů

Princip nezávislých výběrů neboli princip součinu

Pokud se výběr skládá z dvou či více vzájemně nezávislých podvýběrů, pak je celkový počet výběrů roven součinu počtů jednotlivých podvýběrů.

Příklad

- Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 9 obránců a 2 brankáře. Kolik kombinací hokejistů se může objevit na ledě, aby tam byli 3 útočníci, 2 obránci a jeden brankář?

Princip nezávislých výběrů neboli princip součinu

Pokud se výběr skládá z dvou či více vzájemně nezávislých podvýběrů, pak je celkový počet výběrů roven součinu počtů jednotlivých podvýběrů.

Příklad

- Hokejový trenér má k dispozici 13 útočníků, 9 obránců a 2 brankáře. Kolik kombinací hokejistů se může objevit na ledě, aby tam byli 3 útočníci, 2 obránci a jeden brankář?
- Výběr útočníků: $\binom{13}{3} = 286$
- Výběr obránců: $\binom{9}{2} = 36$
- Výběr brankářů: $\binom{2}{1} = 2$
- Odpověď je $286 \cdot 36 \cdot 2 = 20\,592$.

Princip dvojího počítání

Nechť lze každý výběr dále zjemnit na stejný počet l zjemněných výběrů. Dále nechť existuje celkem m různých zjemněných výběrů. Potom počet všech původních výběrů je $\frac{m}{l}$.

Příklad

- Výběr šestic hokejistů na ledě z minulého příkladu chceme zjemnit tím, že budeme uvažovat i pořadí útočníků a obránců.
- Každou kombinaci na ledě lze tedy zjemnit v $3! \cdot 2! = 12$ různých výběrů.
- Celkem těchto uspořádaných výběrů existuje $(13 \cdot 12 \cdot 11) \cdot (9 \cdot 8) \cdot 2 = 247\,104$.
- Původních výběrů je $\frac{247\,104}{12} = 20\,592$ (totéž vyšlo i minule).

- Při řešení příkladů lze někdy použít i princip inkluze a exkluze.
- Obecně je třeba používat selský rozum.

Příklad

- Máme k dispozici celkem 12 hráčů, z toho 5 dobrých útočníků. Kolik lze sestavit 4-členných týmů, které obsahují alespoň jednoho dobrého útočníka?
- Celkem lze sestavit $\binom{12}{4} = 495$ týmů.
- Týmů bez dobrého útočníka je $\binom{12-5}{4} = 35$.
- Týmů s alespoň jedním dobrým útočníkem tedy je $\binom{12}{4} - \binom{12-5}{4} = 460$.

Kombinatorická pravděpodobnost

- Teorie pravděpodobnosti zkoumá tzv. *náhodné pokusy*. Náhodným pokusem rozumíme opakovatelnou činnost prováděnou za stejných podmínek, jejíž výsledek je nejistý a závisí na náhodě (zejména není určen počátečními podmínkami).
- Kombinatorická (nebo také klasická) pravděpodobnost zkoumá situace, kdy náhodný pokus má jen konečně mnoho možných výsledků.
- Pravděpodobnost daného výsledku pak udává míru jeho očekávatelnosti.
- Motivace je např. v hazardních hrách.

Definice (Konečný pravděpodobnostní prostor)

*Konečný pravděpodobnostní prostor je dvojice (Ω, P) , kde Ω je konečná množina **elementárních jevů** a $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ je **funkce pravděpodobnosti**, která podmnožinám Ω přiřazuje reálné hodnoty z intervalu $[0, 1]$ a splňuje*

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$ a
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ kdykoliv $A, B \subseteq \Omega$ jsou disjunktní.

*Libovolná podmnožina $A \subseteq \Omega$ se nazývá **jev** a $P(A)$ je **pravděpodobnost** tohoto jevu.*

Příklad

- Definujte pravděpodobnostní prostor hodů (pocivou) kostkou.

Příklad

- Pravděpodobnostní prostor hodů kostkou je (Ω, P) , kde
 - elementární jevy jsou “co padne”, tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
 - funkce pravděpodobnosti $P(A) = \frac{|A|}{6}$ pro každou $A \subseteq \Omega$.
- Co je jev “padne sudé číslo”? Množina $\{2, 4, 6\}$.
- Pravděpodobnost tohoto jevu je $P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Příklad

- Pravděpodobnostní prostor hodů mincí je $(\{\text{orel, panna}\}, P)$, kde

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\{\text{orel, panna}\}) = 1$$

$$P(\{\text{orel}\}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\{\text{panna}\}) = \frac{1}{2}$$

- Pravděpodobnost elementárního jevu $a \in \Omega$ obvykle zapisujeme jako $P(a)$ namísto $P(\{a\})$.
- Pravděpodobnostní prostor je plně určen množinou Ω a pravděpodobnostmi elementárních jevů. Pro neelementární jev $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ totiž podle definice musí platit

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_n).$$

- Jevy A, B jsou *disjunktní*, pokud nemohou nastat zároveň, tj. pokud $A \cap B = \emptyset$.
- Různé elementární jevy jsou vždy disjunktní.
- Udejte příklady dvou různých jevů, které nejsou disjunktní.

Definice

Konečný pravděpodobnostní prostor (Ω, P) je **uniformní**, je-li každý elementární jev $a \in \Omega$ stejně pravděpodobný, tj. $P(a) = \frac{1}{|\Omega|}$.

- Pro každý jev A v uniformním prostoru platí $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Uvedené prostory hodů kostkou a hodů mincí jsou uniformní.

Příklad

- Namíchání 32 karet je také uniformní pravděpodobnostní prostor, kde elementární jevy jsou permutace karet (těch je 32!).
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{32!}$.
- Jaká je pravděpodobnost jevu, že první karta je eso?

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 1

- Elementární jevy jsou součty, tedy $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$.
- Pravděpodobnost elementárních jevů se ale liší:
 - součet 2 lze získat pouze jako 1+1, proto $P(2) = \frac{1}{36}$,
 - součet 3 lze získat jako 1+2 nebo 2+1, proto $P(2) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,
 - ostatní pravděpodobnosti spočítáme analogicky.

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 1

- Elementární jevy jsou součty, tedy $\Omega = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$.
- Pravděpodobnost elementárních jevů se ale liší:
 - součet 2 lze získat pouze jako 1+1, proto $P(2) = \frac{1}{36}$,
 - součet 3 lze získat jako 1+2 nebo 2+1, proto $P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$,
 - ostatní pravděpodobnosti spočítáme analogicky.

$$\begin{array}{llll} P(2) = \frac{1}{36} & P(5) = \frac{1}{9} & P(8) = \frac{5}{36} & P(11) = \frac{1}{18} \\ P(3) = \frac{1}{18} & P(6) = \frac{5}{36} & P(9) = \frac{1}{9} & P(12) = \frac{1}{36} \\ P(4) = \frac{1}{12} & P(7) = \frac{1}{6} & P(10) = \frac{1}{12} & \end{array}$$

- Jev “padne 8” je tedy elementární s pravděpodobností $P(8) = \frac{5}{36}$.
- Pravděpodobnostní prostor není uniformní.

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 2

- Elementární jevy jsou dvojice hodnot na jednotlivých kostkách, tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{36}$.
- Pravděpodobnostní prostor je uniformní.
- Jak spočítáme pravděpodobnost, že padne 8?

Definujte pravděpodobnostní prostor hodů dvěma kostkami, kde zjišťujeme součet bodů. Jaká je pravděpodobnost, že padne 8?

Řešení 2

- Elementární jevy jsou dvojice hodnot na jednotlivých kostkách, tedy $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Pravděpodobnost každého elementárního jevu je $\frac{1}{36}$.
- Pravděpodobnostní prostor je uniformní.
- Jak spočítáme pravděpodobnost, že padne 8?
- Jev “padne 8” je $A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ a jeho pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$.
- Toto řešení umožňuje odpovědět například na otázku, zda jsou disjunktní jevy “součet je 6” a “součin je 8”. Jsou disjunktní?

- Nezávislost jevů intuitivně znamená, že pravděpodobnost toho, že nastane druhý z jevů není nijak ovlivněna tím, zda nastal či nenastal první jev.
- Kupříkladu pokud hážeme dvěma kostkami, jsou jevy “na první kostce padne 6” a “na druhé kostce padne liché číslo” nezávislé.
- Oproti tomu jevy “na první kostce padne 5” a “součet bude 8” nezávislé nejsou.

Definice (Nezávislé jevy)

Jevy A, B v prostoru (Ω, P) jsou *nezávislé*, pokud platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Ukážeme, že jevy “na první kostce padne 5” a “součet bude 8” jsou závislé.

- Pravděpodobnostní prostor (Ω, P) je tvaru $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $P(a) = \frac{1}{36}$ pro každý elementární jev $a \in \Omega$ (prostor je uniformní).
- Jev “na první kostce padne 5” je $A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$ a $P(A) = \frac{1}{6}$.
- Jev “součet bude 8” je $B = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$ a $P(B) = \frac{5}{36}$.
- Jevy A, B jsou závislé, neboť $P(A \cap B) = P(\{5, 3\}) = \frac{1}{36}$ a tedy

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{36} = \frac{5}{216}.$$

- Dva různé elementární jevy s nenulovou pravděpodobností jsou závislé, protože $P(\{a\} \cap \{b\}) = P(\emptyset) = 0 \neq P(a) \cdot P(b)$. Navíc je jasné, že pokud nastane jeden elementární jev, nemůže nastat druhý.
- Z analogického důvodu platí, že dva různé disjunktní jevy s nenulovými pravděpodobnostmi jsou také závislé.

Dotazy

- Ze zamíchaných karet rozdáme dvěma hráčům po pěti kartách. Jsou výběry karet, které dostanou, nezávislé?
- Hodíme dvěma kostkami. Je jev “na obou padne totéž” nezávislý s jevem “na první kostce padne 2”?

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

Podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ je pravděpodobnost jevu B za předpokladu, že nastal jev A a vypočítá se jako

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Jevy A, B jsou nezávislé právě když $P(B|A) = P(B)$.

Příklad

- Kolik je podmíněná pravděpodobnost jevu “při hodu dvěma kostkami padne součet aspoň 10” za předpokladu, že “na první kostce padlo 5”?

Definice (Podmíněná pravděpodobnost)

Podmíněná pravděpodobnost $P(B|A)$ je pravděpodobnost jevu B za předpokladu, že nastal jev A a vypočítá se jako

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Jevy A, B jsou nezávislé právě když $P(B|A) = P(B)$.

Příklad

- Kolik je podmíněná pravděpodobnost jevu “při hodu dvěma kostkami padne součet aspoň 10” za předpokladu, že “na první kostce padlo 5”?
- Odpověď je $\frac{1}{3}$.
- Pravděpodobnost “padne součet aspoň 10” je $\frac{1}{6}$ (závislost jevů).

Střední hodnota

- X je *náhodná proměnná* (nebo *náhodná veličina*), pokud je její hodnota jednoznačně určena výsledkem náhodného pokusu.
- Formálně je náhodná proměnná libovolná funkce přiřazující elementárním jevům prostoru (Ω, \mathcal{P}) reálná čísla.

Definice (Střední hodnota)

Nechť náhodná proměnná X může nabýt hodnot h_1, h_2, \dots, h_n s pravděpodobností pořadě p_1, p_2, \dots, p_n , kde $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Střední hodnotou proměnné X je číslo

$$EX = p_1 \cdot h_1 + p_2 \cdot h_2 + \dots + p_n \cdot h_n.$$

- Střední hodnota udává průměr získaných hodnot náhodné proměnné X při mnoha opakováních náhodného pokusu.

Příklad

- Jaká je střední hodnota čísel padlých na hrací kostce?

Příklad

- Jaká je střední hodnota čísel padlých na hrací kostce?
- Odpověď je

$$\frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1}{6} \cdot 21 = 3,5$$

Příklad

- Kolik je průměrně třeba hodů mincí, aby padlo 3x totéž?
- 3x totéž padne nejdříve třetím a nejpozději pátým hodem.
- Pravděpodobnostní postor je

(o, o, o)	(o, o, p, o)	(o, o, p, p, o)	(o, o, p, p, p)
(p, p, p)	(o, p, o, o)	(o, p, o, p, o)	(o, p, o, p, p)
	(o, p, p, p)	(o, p, p, o, o)	(o, p, p, o, p)
	(p, o, o, o)	(p, o, o, p, o)	(p, o, o, p, p)
	(p, o, p, p)	(p, o, p, o, o)	(p, o, p, o, p)
	(p, p, o, p)	(p, p, o, o, o)	(p, p, o, o, p)

- Náhodná proměnná X je vždy rovna délce n -tice.
- Pravděpodobnost každé n -tice je $\frac{1}{2^n}$.
- Celkem dostáváme, že průměrný počet potřebných hodů je

$$EX = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{8}\right) + 4 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{16}\right) + 5 \cdot \left(12 \cdot \frac{1}{32}\right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{2} + \frac{15}{8} = 4,125.$$

Věta

- *Střední hodnota konstanty c je $Ec = c$.*
- *Střední hodnota součinu náhodné proměnné X a konstanty c je*
$$E(cX) = c \cdot EX.$$
- *Střední hodnota součtu náhodných proměnných X, Y je*
$$E(X + Y) = EX + EY.$$

Příklad

- Jaká je střední hodnota součtu čísel padlých na dvou kostkách?
- Odpověď je $E(X + Y) = EX + EY = 3,5 + 3,5 = 7$.

Věta

Střední hodnota součinu nezávislých náhodných proměnných X, Y je

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel padlých na dvou kostkách?
- Odpověď je $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25$.

- Vztah pro střední hodnotu součinu pro závislé náhodné proměnné neplatí.

Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel horní a spodní stěny hozené kostky?
- Protože náhodné proměnné jsou závislé (součet protilehlých stěn kostky je vždy 7), nelze použít vztah $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$ (tento vztah by nám dal hodnotu 12,25).

- Vztah pro střední hodnotu součinu pro závislé náhodné proměnné neplatí.

Příklad

- Jaká je střední hodnota součinu čísel horní a spodní stěny hozené kostky?
- Protože náhodné proměnné jsou závislé (součet protilehlých stěn kostky je vždy 7), nelze použít vztah $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$ (tento vztah by nám dal hodnotu 12,25).
- Z definice spočítáme střední hodnotu součinu jako

$$1 \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 9 + \frac{1}{3}.$$