
Algebra II, 1. termín, úloha A, 9. 6. 2008

Jméno :

UČO :

Identity v podalgebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk unárního operačního symbolu f a nulárního operačního symbolu c a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, p, d)$ a $\mathcal{B} = (B, q, e)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n -árních termů našeho jazyka.

.....
.....

b) Lze termy psát v nějakém kompaktním tvaru ?

.....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře \mathcal{A} .

.....
.....

d) Algebra \mathcal{B} je podalgebrou algebry \mathcal{A} , platí-li

.....

e) Je-li navíc $t \in T_n$, $b_1, \dots, b_n \in B$, máme $t^{\mathcal{B},n}(b_1, \dots, b_n) =$

.....

f) Dokažte tvrzení z e).

.....
.....
.....
.....

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$. Pak též

.....

h) Dokažte tvrzení z g).

.....
.....
.....

i) Identity v našem jazyce jsou čtyř typů. Popište je.

.....
.....
.....
.....

j) Nechť algebra \mathcal{A} je konkretizována takto: $A = \{0, 1, 2\}$, $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 0$, $d = 0$. Pro každý typ charakterizujte identity, které jsou v \mathcal{A} splněny.

.....
.....
.....
.....

Algebra II, 1. termín, úloha B, 9. 6. 2008

Jméno :

UČO :

Kongruence svazů

Dokažte, že svaz $(\text{Con } \mathcal{L}, \subseteq)$ všech kongruencí svazu $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je distributivní.
Doplňte důkaz.

Nechť $\alpha, \beta, \gamma \in \text{Con } \mathcal{L}$, $a, b \in L$, $(a, b) \in \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Ukážeme, že

$$(a, b) \in \dots\dots\dots$$

Nechť tedy $a \alpha b$. Existují $n \in \mathbb{N}$, $c_0, \dots, c_{2n} \in L$ tak, že

$$a = c_0 \beta c_1 \gamma \dots\dots\dots$$

Pro $x, y, z \in L$ klademe

$$m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) .$$

Ukažte, že $m(x, x, y) = x$:

.....

Pro libovolné c je $m(a, a, c) \alpha m(a, \dots, c)$. Dále pro lib. c, c' platí $m(a, b, c) \dots m(a, b, c')$,
neboť

.....

Dále $c \beta c'$ dá $m(a, b, c) \beta \dots\dots\dots$

a podobně $\dots\dots\dots$

Platí $m(a, b, c_0) = \dots\dots\dots$, $m(a, b, c_{2n}) = \dots\dots\dots$

Konečně použijeme posloupnost

$$m(a, b, c_0), \dots, m(a, b, c_{2n}) .$$

.....

Algebra II, 1. termín, úloha C, 9. 6. 2008

Jméno :

UČO :

a) Je třída všech unárních algeber (A, f) , kde $f : A \rightarrow A$ je bijekce, která je sama k sobě inverzní, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť S je alespoň dvouprvková množina a operace \cdot a \circ na této množině jsou dány takto: pro libovolná $a, b \in S$ platí $a \cdot b = a$, $a \circ b = b$. Rozhodněte, zda jsou grupoidy (S, \cdot) a (S, \circ) izomorfní.

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Předně si uvědomme, že každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačným způsobem zapsat ve tvaru $2^{x-1}(2y-1)$ kde $x, y \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda zobrazení $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definované předpisem $\alpha(2^{x-1}(2y-1)) = (x, y)$ je homomorfismus grupoidu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +)$ do grupoidu $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 23. 6. 2008

Jméno :

UČO :

Věta o homomorfismu

Uvažujme jazyk unárního operačního symbolu f a nulárního operačního symbolu c . (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !) Nechť $\mathcal{A} = (A, g, d)$, $\mathcal{B} = (B, h, e)$ jsou algebry našeho jazyka.

a) Definujte homomorfismus algebry \mathcal{A} do algebry \mathcal{B} .

b) Definujte podalgebru algebry \mathcal{A} .

c) Definujte kongruenci algebry \mathcal{A} .

d) Definujte faktorovou algebru a tzv. přirozený homomorfismus.

e) Dokažte, že pro homomorfismus $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ je $\ker \alpha = \dots\dots\dots$ kongruencí algebry $\dots\dots\dots$

Skutečně,

f) Ukažte, že $\text{im } \alpha = \dots\dots\dots$ je nosičem podalgebry algebry \dots

Skutečně,

g) Doplňte a dokažte : libovolný homomorfismus $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ lze psát ve tvaru $\alpha = \iota \circ \beta \circ (\ker \alpha)^\sharp$, kde ι, β jsou definovány vztahy :

a mají následující vlastnosti :

Dokažte korektnost definice zobrazení β :

h) Části e) - g) ilustrujte na příkladě $\mathcal{A} = (\{0, 1, 2, 3, a, b\}, g, 3)$, $\mathcal{B} = (\{p, q, r\}, h, q)$, kde $g(a) = 0, g(b) = 2, g(0) = 1, g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 0, h(p) = q, h(q) = r, h(r) = q$. Zvolte si libovolný homomorfismus α .

Algebra II, 2. termín, úloha B, 23. 6. 2008

Jméno :

UČO :

Svazy kongruencí. Je dána monounární algebra $\mathcal{A} = (A, f)$. Nechť $\text{Con } \mathcal{A}$ značí množinu všech jejích kongruencí. Nechť pro relace ρ, σ na množině A je

$$\rho \circ \sigma = \{ (a, c) \in A \times A \mid \text{existuje } b \in A \text{ splňující } a \rho b \sigma c \} .$$

Relace ρ, σ jsou *záměnné*, je-li $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.

a) Dokažte, že $(\text{Con } \mathcal{A}, \subseteq)$ je úplný svaz.

b) Pro $\rho, \sigma \in \text{Con } \mathcal{A}$ máme

$$\rho \wedge \sigma = \dots\dots\dots$$

$$\rho \vee \sigma = \dots\dots\dots$$

c) Pro *záměnné* kongruence máme

$$\rho \vee \sigma = \dots\dots\dots$$

d) Dokažte : Nechť algebra \mathcal{A} má libovolné dvě kongruence *záměnné*. Pak je svaz $(\text{Con } \mathcal{A}, \wedge, \vee)$ *modulární*.

Skutečně, nechť $\rho, \sigma, \tau \in \text{Con } \mathcal{A}$, $\rho \dots\dots\dots$

Máme ukázat, že $\rho \vee (\sigma \wedge \tau) \dots\dots\dots$

Nechť tedy $(a, b) \in \dots\dots\dots$

Existuje $c \in A$ tak, že $\dots\dots\dots$

Hledáme $d \in A$ tak, aby $\dots\dots\dots$

Stačí vzít $\dots\dots\dots$

neboť $\dots\dots\dots$, $\dots\dots\dots$ a $\dots\dots\dots$ plyne z $\dots\dots\dots$, $\dots\dots\dots$

e) Nechť $A = \{a, b, p, q\}$, $f(a) = b, f(b) = a, f(p) = q, f(q) = p$. Popište $(\text{Con } \mathcal{A}, \subseteq)$.

- f) Tento svaz je/není (zakroužkujte správnou odpověď) modulární a proto (vyberte)
- i) existuje dvojice kongruencí, které nejsou záměnné
 - ii) ze znalosti svazu na izomorfismus nelze nic usoudit o záměnnosti kongruencí.

g) V případě i) takovou dvojici ρ, σ najděte a uveďte jak vypadá $\rho \circ \sigma$ a $\sigma \circ \rho$ (například namaluje relace jako orientované grafy).

V případě ii) dejte příklad algebry \mathcal{B} , která má svaz kongruencí $(\text{Con } \mathcal{B}, \subseteq)$ izomorfní s $(\text{Con } \mathcal{A}, \subseteq)$, přičemž

Algebra II, 2. termín, úloha C, 23.6. 2008

Jméno :

UČO :

a) Je třída všech grupoidů (S, \cdot) v nichž existuje neutrální prvek, uvažovaná v jazyku jediného binárního operačního symbolu, uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť Σ je konečná množina a (Σ^*, \cdot) je monoid všech slov nad Σ s operací zřetězení. Nechť ρ je relace na množině Σ^* definovaná vztahem

$$u \rho v \quad \text{právě když} \quad (\forall a \in \Sigma) (u \in \Sigma^* a \Sigma^* \iff v \in \Sigma^* a \Sigma^*).$$

Je relace ρ kongruencí monoidu (Σ^*, \cdot) ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině \mathbb{Z} uvažujeme unární operaci f danou předpisem $f(x) = x + 1$. Rozhodněte, zda jsou unární algebry $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, f)$ a $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 3. termín, úloha A, 1.7. 2008

Jméno :

UČO :

Uvažujme jazyk jediného operačního symbolu f . (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Připomeňte definici součinu systému množin $(A_i)_{i \in I}$. (I je libovolná množina !)

.....

b) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je součinem systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i \in I}$, jestliže

.....

.....

c) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i \in I}$, jestliže

.....

.....

d) Nechť \mathcal{A} a \mathcal{B} jsou algebry s neprázdnými nosiči a nechť \mathcal{C} je jejich podpřímý součin. Nechť σ je identita. U jednotlivých tvrzení vyznačte zda platí či nikoliv.

(i) $(\mathcal{A}$ nebo \mathcal{B} splňuje $\sigma) \implies \mathcal{C}$ splňuje σ ,

(ii) \mathcal{C} splňuje $\sigma \implies (\mathcal{A}$ nebo \mathcal{B} splňuje $\sigma)$,

(iii) $(\mathcal{A}$ i \mathcal{B} splňují $\sigma) \implies \mathcal{C}$ splňuje σ ,

(iv) \mathcal{C} splňuje $\sigma \implies (\mathcal{A}$ i \mathcal{B} splňují $\sigma)$.

e) Doplňte a dokažte. Nechť \mathcal{A} je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$.

Pak $\bigcap_{i \in I} \ker \dots$

.....

.....

.....

f) Algebra \mathcal{A} je podpřímě nerozložitelná, platí-li

.....

.....

g) Pro která $n \in \mathbb{N}$ je algebra $\mathcal{A}_n = (\mathbb{Z}_n, g)$, kde $g(a) = a + 1$, podpřímě nerozložitelná ?

.....

h) Dokažte tvrzení z g).

.....

.....

i) Rozložte algebru \mathcal{A}_{12} na podpřímý součin podpřímě nerozložitelných algeber.

.....

.....

Algebra II, 3. termín, úloha B, 1.7. 2008

Jméno :

UČO :

Booleovy algebry

Booleova algebra je uspořádaná šestice $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, kde (B, \wedge, \vee) je distributivní svaz, $'$ je unární a $0, 1$ jsou nulární operace na množině B splňující :

pro libovolné $b \in B$ je $b \wedge 0 = 0$, $b \vee 1 = 1$, $b \wedge b' = 0$, $b \vee b' = 1$.

Pro Booleovu algebru \mathcal{B} a $a \in B$ nechť $\mathcal{B} \mid a = ([0, a], \wedge, \vee, *, 0, a)$, kde $[0, a] = \{b \in B \mid b \leq a\}$, $b^* = a \wedge b'$.

a) Dokažte, že $\mathcal{B} \mid a$ je též Booleova algebra.

b) Dokažte, že zobrazení $\alpha_a : B \rightarrow [0, a]$, $b \mapsto a \wedge b$ je surjektivní homomorfismus \mathcal{B} na $\mathcal{B} \mid a$.

c) Dokažte, že algebra \mathcal{B} je isomorfní s $\mathcal{B} \mid a \times \mathcal{B} \mid a'$

Použijete-li někde nějaké lemma z přednášky, musíte je zformulovat.

Algebra II, 3. termín, úloha C, 1.7. 2008

Jméno :

UČO :

a) Je třída všech unárních algeber (A, f) , kde $f \circ f = f$, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Na množině \mathbb{Z} uvažujeme binární operaci sčítání a unární operaci f danou předpisem $f(x) = x^2$. Dále je ρ relace na množině \mathbb{Z} definovaná vztahem

$$\text{pro } a, b \in \mathbb{Z} \text{ máme } a \rho b \iff 7 \mid (a - b) .$$

Je tato relace ρ kongruencí algebry $(\mathbb{Z}, +, f)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině \mathbb{Q} uvažujeme unární operaci f danou předpisem $f(x) = x + 1$, $x \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda jsou unární algebry $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, f)$ a $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.