Algebra II, 1. termín, úloha A, 27. 5. 2009

Jméno : **UČO :**

Identity v podalgebrách (Žádné $\sigma \in \Sigma$!)

Uvažujeme jazyk unárního operačního symbolu f a nulárního operačního symbolu c a v něm algebry $\mathcal{A} = (A, p, d)$ a $\mathcal{B} = (B, q, e)$.

a) Definujte (induktivně) množinu T_n všech n-árních termů našeho jazyka.

....

b) Lze termy psát v nějakém kompaktním tvaru ?

....

c) Definujte (induktivně) realizaci $t^{\mathcal{A},n}$ termu $t \in T_n$ v algebře $\mathcal{A}$.

....

d) Algebra $\mathcal{B}$ je podalgebrou algebry $\mathcal{A}$, platí-li

....

e) Je-li navíc $t \in T_n,\ b_1, \dots, b_n \in B$, máme $t^{\mathcal{B},n}(b_1, \dots, b_n) =$ ....

f) Dokažte tvrzení z e).

....

....

g) Nechť dále je $u \in T_n$, nechť $\mathcal{A} \models t \simeq u$. Pak též

....

h) Dokažte tvrzení z g).

....

....

i) Identity v našem jazyce jsou čtyř typů. Popište je.

....

....

j) Nechť algebra $\mathcal{A}$ je konkretizována takto: $A = \{0, 1, 2\},\ p(0) = 1,\ p(1) = 2,\ p(2) = 0,\ d = 0$. Pro každý typ charakterizujte identity, které jsou v $\mathcal{A}$ splněny.

....

....

Algebra II, 1. termín, úloha B, 27. 5. 2009

Jméno : **UČO :**

Svazy kongruencí. Je dána monounární algebra $\mathcal{A} = (A, f)$. Nechť $\mathsf{Con}\,\mathcal{A}$ značí množinu všech jejích kongruencí. Nechť pro relace ρ, σ na množině A je

$$\rho \circ \sigma = \{\, (a, c) \in A \times A \mid \text{ existuje } b \in A \text{ splňující } a\ \rho\ b\ \sigma\ c \,\} \ .$$

Relace ρ, σ jsou *záměnné*, je-li $\sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$.

a) Dokažte, že $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \subseteq)$ je úplný svaz.

b) Pro $\rho, \sigma \in \mathsf{Con}\,\mathcal{A}$ máme

$\rho \wedge \sigma = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\rho \vee \sigma = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

c) Pro záměnné kongruence máme

$\rho \vee \sigma = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$

d) Dokažte : Nechť algebra $\mathcal{A}$ má libovolné dvě kongruence záměnné. Pak je svaz $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \wedge, \vee)$ modulární.

Skutečně, nechť $\rho, \sigma, \tau \in \mathsf{Con}\,\mathcal{A}$, ρ ....

Máme ukázat, že $\rho \vee (\sigma \wedge \tau)$ ....

Nechť tedy $(a, b) \in$ ....

Existuje $c \in A$ tak, že ....

Hledáme $d \in A$ tak, aby ....

Stačí vzít ....

neboť .... , ... a .... plyne z .... , ...

e) Nechť $A = \{a, b, p, q\}$, $f(a) = b, f(b) = a, f(p) = q, f(q) = p$. Popište $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \subseteq)$.

f) Tento svaz je/není (zakroužkujte správnou odpověď) modulární a proto (vyberte)

- i) existuje dvojice kongruencí, které nejsou záměnné
- ii) ze znalosti svazu na izomorfismus nelze nic usoudit o záměnnosti kongruencí.

g) V případě i) takovou dvojici ρ, σ najděte a uveďte jak vypadá $\rho \circ \sigma$ a $\sigma \circ \rho$ (například namaluje relace jako orientované grafy).

V případě ii) dejte příklad algebry $\mathcal{B}$, která má svaz kongruencí $(\mathsf{Con}\,\mathcal{B}, \subseteq)$ izomorfní s $(\mathsf{Con}\,\mathcal{A}, \subseteq)$, přičemž ....

Algebra II, 1. termín, úloha C, 27. 5. 2009

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber (A, f), kde $f \circ f = f$, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Na množině $\mathbb{Z}$ uvažujeme binární operaci sčítání a unární operaci f danou předpisem $f(x) = x^2$. Dále je ρ relace na množině $\mathbb{Z}$ definovaná vztahem

$$\text{pro } a, b \in \mathbb{Z} \text{ máme} \qquad a\ \rho\ b \quad \Longleftrightarrow \quad 7 \mid (a - b)\ .$$

Je tato relace ρ kongruencí algebry $(\mathbb{Z}, +, f)$?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Q}$ uvažujeme unární operaci f danou předpisem $f(x) = x + 1,\ x \in \mathbb{Q}$. Rozhodněte, zda jsou unární algebry $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, f)$ a $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 2. termín, úloha A, 19.6. 2009

Jméno : **UČO :**

Uvažujme jazyk jediného unárního operačního symbolu f. (Veškeré výrazy typu $\sigma \in \Sigma$ budou při opravě ignorovány !)

a) Připomeňte definici součinu systému množin $(A_i)_{i \in I}$. (I je libovolná množina !)

....

b) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je součinem systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i \in I}$, jestliže

....

....

c) Algebra $\mathcal{A} = (A, g)$ je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i = (A_i, g_i))_{i \in I}$, jestliže

....

....

d) Nechť $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ jsou algebry s neprázdnými nosiči a nechť $\mathcal{C}$ je jejich podpřímý součin. Nechť σ je identita. U jednotlivých tvrzení vyznačte zda platí či nikoliv.

(i) ($\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ) $\implies$ $\mathcal{C}$ splňuje σ,

(ii) $\mathcal{C}$ splňuje σ $\implies$ ($\mathcal{A}$ nebo $\mathcal{B}$ splňuje σ),

(iii) ($\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují σ) $\implies$ $\mathcal{C}$ splňuje σ,

(iv) $\mathcal{C}$ splňuje σ $\implies$ ($\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ splňují σ).

e) Doplňte a dokažte. Nechť $\mathcal{A}$ je podpřímým součinem systému $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$.

Pak $\bigcap_{i \in I}$ ker.................

....

....

....

f) Algebra $\mathcal{A}$ je podpřímo nerozložitelná, platí-li

....

....

g) Pro která $n \in \mathbb{N}$ je algebra $\mathcal{A}_n = (\mathbb{Z}_n, g)$, kde $g(a) = a + 1$, podpřímo nerozložitelná ?

....

h) Dokažte tvrzení z g).

....

....

i) Rozložte algebru $\mathcal{A}_{12}$ na podpřímý součin podpřímo nerozložitelných algeber.

....

....

Algebra II, 2. termín, úloha B, 19.6. 2009

Jméno : **UČO :**

Booleovy algebry

Booleova algebra je uspořádaná šestice $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ', 0, 1)$, kde $(B, \wedge, \vee)$ je distributivní svaz, ' je unární a 0,1 jsou nulární operace na množině B splňující :

pro libovolné $b \in B$ je $b \wedge 0 = 0,\ b \vee 1 = 1,\ b \wedge b' = 0,\ b \vee b' = 1$.

Pro Booleovu algebru $\mathcal{B}$ a $a \in B$ nechť $\mathcal{B} \mid a = ([0, a], \wedge, \vee, ^*, 0, a)$, kde $[0, a] = \{b \in B \mid b \leq a\},\ b^* = a \wedge b'$.

a) Dokažte, že $\mathcal{B} \mid a$ je též Booleova algebra.

b) Dokažte, že zobrazení $\alpha_a : B \to [0, a],\ b \mapsto a \wedge b$ je surjektivní homomorfismus $\mathcal{B}$ na $\mathcal{B} \mid a$.

c) Dokažte, že algebra $\mathcal{B}$ je izomorfní s $\mathcal{B} \mid a \times \mathcal{B} \mid a'$

Použijete-li někde nějaké lemma z přednášky, musíte je zformulovat.

Algebra II, 2. termín, úloha C, 19.6. 2009

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech grupoidů $(S, \cdot)$ v nichž existuje neutrální prvek, uvažovaná v jazyku jediného binárního operačního symbolu, uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť Σ je konečná množina a $(\Sigma^*, \cdot)$ je monoid všech slov nad Σ s operací zřetězení. Nechť ρ je relace na množině Σ^* definovaná vztahem

$$u \; \rho \; v \quad \text{právě když} \quad (\; \forall \; a \in \Sigma \;) \; (\; u \in \Sigma^* a \Sigma^* \iff v \in \Sigma^* a \Sigma^* \;) \; .$$

Je relace ρ kongruencí monoidu $(\Sigma^*, \cdot)$?

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Na množině $\mathbb{Z}$ uvažujeme unární operaci f danou předpisem $f(x) = x+1$. Rozhodněte, zda jsou unární algebry $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, f)$ a $\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: ± 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.

Algebra II, 1. termín, úloha A, 26.6. 2009

Jméno : **UČO :**

Reprezentace konečných distributivních svazů

a) Algebraicky definovaný svaz $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svazem ve smyslu uspořádaných množin, klademe-li

$$a \leq b \iff \text{...} .$$

b) Nechť $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ je svaz. Prvek $a \in L$ je spojově ireducibilní, jestliže

....

Množinu všech spojově ireducibilních prvků svazu $\mathcal{L}$ s vyjímkou nejmenšího (pokud existuje) značíme $\mathsf{J}(\mathcal{L})$.

c) Nakreslete diagram uspořádané množiny $(\mathsf{J}(\mathcal{K}), \leq)$ pro svaz $\mathcal{K}$

d) Nechť $\mathcal{A} = (A, \leq)$ je uspořádaná množina. Množina $X \subseteq A$ je dědičná, jestliže

....

Množinu všech dědičných podmnožin značíme $\mathsf{H}(\mathcal{A})$.

e) Doplňte větu : Konečný distributivní svaz $\mathcal{L} = (L, \leq)$ je izomorfní s množinou

....

s uspořádáním ....

f) Doplnění důkazu : Uvažujeme zobrazení

$$\xi : L \to \text{.................}, \quad a \mapsto \text{..............................}$$

Vzhledem k tomu, že svaz $\mathcal{L}$ je ...., platí pro lib. $a \in L$, že $a = \sup \xi(a)$.

Odtud zejména plyne, že zobrazení ξ je .... a že platí $\xi(a) \leq \xi(b)$ implikuje $a \leq b$.

Zřejmě též $a \leq b$ dá . . . .

Zbývá ukázat, že zobrazení ξ je . . . .

Skutečně, nechť $X = \{$.................................$\} \in$ ....

Položme $a = \sup X$. Pak $\xi(a) \supseteq X$. Nechť konečně $y \in \xi(a)$. Pak

. . . .

. . . .

. . . .

g) Uveďte diagram uspořádané množiny, kterou jste doplnili do e), pro náš konkrétní příklad svazu $\mathcal{K}$.

h) Sledujte důkaz z f) a uveďte **zcela konkrétně**, co v případě svazu $\mathcal{K}$ neprošlo.

Algebra II, 1. termín, úloha B, 26.6. 2009

Jméno : **UČO :**

Syntaktický semiring

Nechť $A = \{a, b\},\ a \neq b$. Nechť $(A^*, \cdot)$ je volný monoid nad A a nechť P je množina všech konečných podmnožin množiny A^* s násobením

$$\{u_1, \ldots, u_k\} \cdot \{v_1, \ldots, v_l\} = \{u_1v_1, \ldots, u_1v_l, \ldots, u_kv_1, \ldots, u_kv_l\}\ .$$

a) Definujte kongruenci algebry $\mathcal{P} = (P, \cdot, \cup)$.

b) Nechť $L \subseteq A^*$. Ukažte, že relace $\sim_L$ definovaná vztahem

$$\{u_1, \ldots, u_k\} \sim_L \{v_1, \ldots, v_l\} \iff$$

$$(\ \forall\ p, q \in A^*\ )\ (\ pu_1q, \ldots, pu_kq \in L \iff pv_1q, \ldots, pv_lq \in L\ )$$

je kongruencí algebry $\mathcal{P}$.

c) Jak vypadá $\mathcal{P}/\sim_L$ pro $L = \{a^n \mid n \geq 0\}$?

d) Pro $n \in \mathbb{N}$ v $\mathcal{P}$ určete $< \{a^n\} >$.

e) Najděte všechny automorfismy algebry $\mathcal{P}$.

f) Pro která $r, s, t \geq 0$ algebra $\mathcal{P}$ splňuje identitu $x^r(y \cup z) = x^s y \cup x^t z$? – zdůvodněte

Body : vše po 5

Algebra II, 1. termín, úloha C, 26.6. 2009

Jméno : **UČO :**

a) Je třída všech unárních algeber (A, f), kde $f : A \to A$ je bijekce, která je sama k sobě inverzní, uvažovaná v jazyku jediného unárního operačního symbolu uzavřená na operátor H ?

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

b) Nechť S je alespoň dvouprvková množina a operace $\cdot$ a $\circ$ na této množině jsou dány takto: pro libovolná $a, b \in S$ platí $a \cdot b = a$, $a \circ b = b$. Rozhodněte, zda jsou grupoidy $(S, \cdot)$ a $(S, \circ)$ izomorfní.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

c) Předně si uvědomme, že každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ lze jednoznačným způsobem zapsat ve tvaru $2^{x-1}(2y-1)$ kde $x, y \in \mathbb{N}$. Rozhodněte, zda zobrazení $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definované předpisem $\alpha(2^{x-1}(2y-1)) = (x, y)$ je homomorfismus grupoidu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +)$ do grupoidu $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

(Odpověď ano/ne: $\pm$ 4 body, důkaz/protipříklad: 6 bodů.)

Záporné body se počítají pouze v rámci úlohy C, tj. minimální možný počet bodů za tuto úlohu je 0. V případě nedostatku místa pokračujte na zadní stranu.