

lin. zobrazení: $f: V \rightarrow W$

$$f(u+v) = f(u) +_W f(v)$$

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$$

prostor se skal. součinem

$$u, v \in V: \langle u, v \rangle \in \mathbb{R}$$

$$V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

ortog. zobrazení: $f: V \rightarrow W$

$$\forall u, v \in V: \langle u, v \rangle_V = \langle f(u), f(v) \rangle_W$$

4 30-9:56

$$\begin{aligned} \langle f(u+v), f(u+v) \rangle &= \langle f(u) +_W f(v), f(u) +_W f(v) \rangle = \\ &= \langle f(u), f(u) +_W f(v) \rangle + \langle f(v), f(u) +_W f(v) \rangle = \\ &= \langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle + \langle f(u), f(v) \rangle + \langle f(v), f(u) \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle f(u), f(v) \rangle \end{aligned}$$

ortog. zobrazení: $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

Jinak: $\langle f(u+v), f(u+v) \rangle = \langle u+v, u+v \rangle =$

$$= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle u, v \rangle$$

$$\Rightarrow \langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle$$

4 30-10:08

$$R_\alpha: \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = A$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

spínáje $A^T = A^{-1}$

4 30-10:14

lin. zobrazení f je injektivní \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \ker f = \{0\}$$

\Rightarrow zřejmě

\Leftarrow f není injektivní: $\exists u, v: f(u) = f(v)$

$$0 = f(u) - f(v) = f(u - v)$$

$u - v \neq 0$

4 30-10:16

$f: V \xrightarrow{\text{injektivní}} W$

stotožňujeme (ušetří) V a $f(V)$

$(V \subset W)$

4 30-10:20

$f: V \rightarrow V$

ortonorm. ortonorm. báze x

$$f(u) = A[u]_x^T$$

4 30-10:22

$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y = x^T \cdot y$
 $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
 f je ortog. zobr.

$\Rightarrow A^T \cdot A = E$

$(0 \dots 1 \dots 0)$
 x

$(A^T \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ki} \cdot A_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow A^T \cdot A = E$

$x^T \cdot y =$ (pro x, y ortog. orlon. báze)
 $= \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & x \neq y \end{cases}$

$(A^T \cdot A)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ki} \cdot A_{kj} \Rightarrow A^T \cdot A = E$

4 30-10:24



4 30-10:31

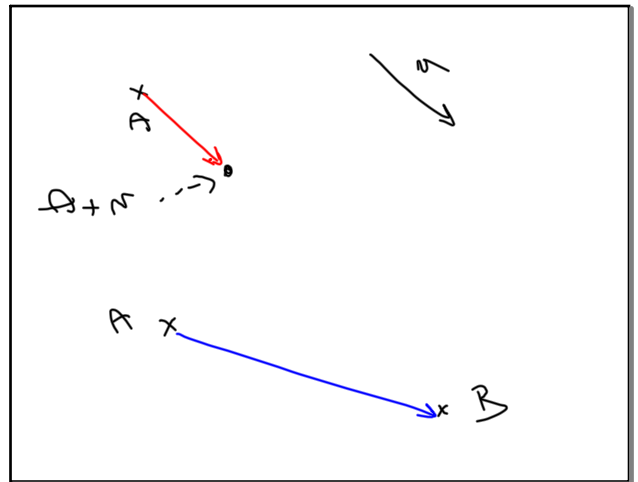
Věta

Necht V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $f: V \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Pak f je ortogonální, právě když v některé ortonormální bázi (a pak už ve všech) má matici A splňující $A^T = A^{-1}$ (tedy ortogonální matici).

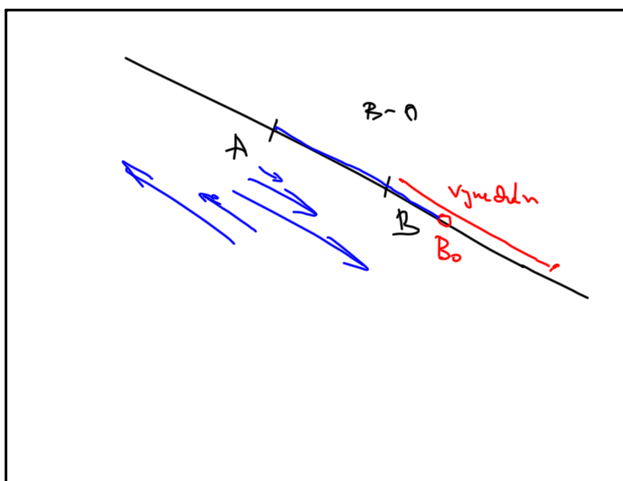
\Rightarrow báze v_i kde matice A mále k bázi
 jsou A, B, \dots, P (regulární):
 $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$

$A^T = A^{-1} \Rightarrow B^T = (P \cdot A \cdot P^{-1})^T =$
 $= (P^{-1})^T \cdot A^T \cdot P^T = (P^{-1})^T \cdot A^{-1} \cdot P^T =$
 $\underline{\underline{\text{báze orlon.}}}$ $(P^{-1})^T \cdot A^{-1} \cdot P^T = (P \cdot A \cdot P^{-1})^{-1}$
 $(P^{-1})^T (P^{-1})^T = B^{-1}$

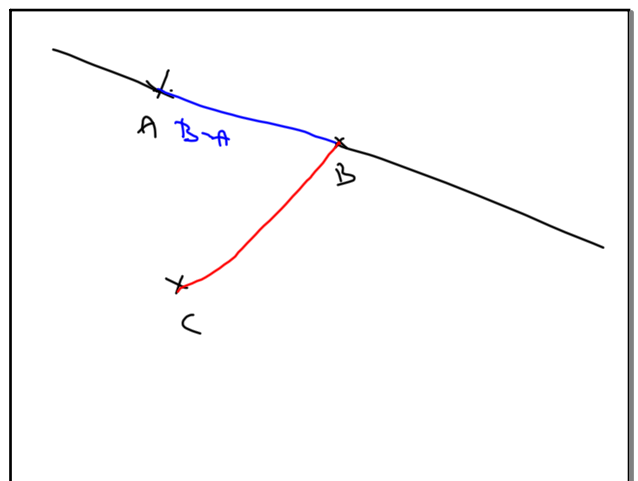
4 30-10:31



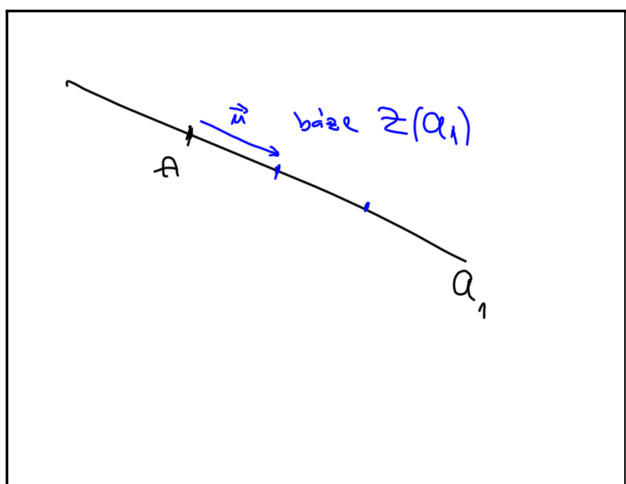
4 30-10:31



4 30-10:48



4 30-10:51



4 30-10:58

Ortogonalní zobrazení Analytická geometrie Vlastní hodnoty (třída) a vlastní vektory

Příklad

Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů (a_1, \dots, a_n) a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$, tj. tzv. **nadrovina** v \mathcal{A}_n .

4 30-11:01

Ortogonalní zobrazení Analytická geometrie Vlastní hodnoty (třída) a vlastní vektory

Příklad

Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů (a_1, \dots, a_n) a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$, tj. tzv. **nadrovina** v \mathcal{A}_n .

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

4 30-11:01

$$\langle A, B, C \rangle = \{ A + r \cdot (B - A) + s \cdot (C - A) \mid r, s \in \mathbb{R} \}$$

$$r = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{3} : X = \frac{5}{6}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}C$$

4 30-11:03

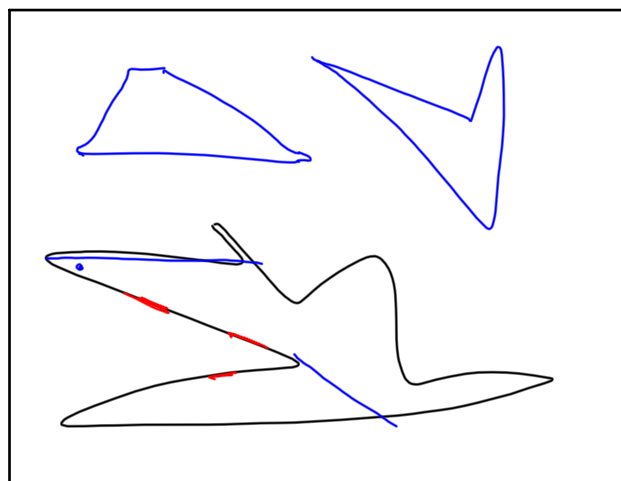
$A \quad X \quad B$

$1 \cdot A \quad \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B \quad 1 \cdot B$

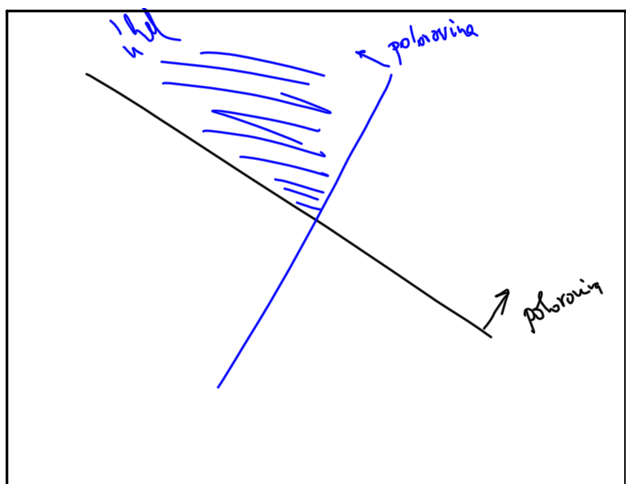
$2 \cdot B - 1 \cdot A$

čtyřstěn

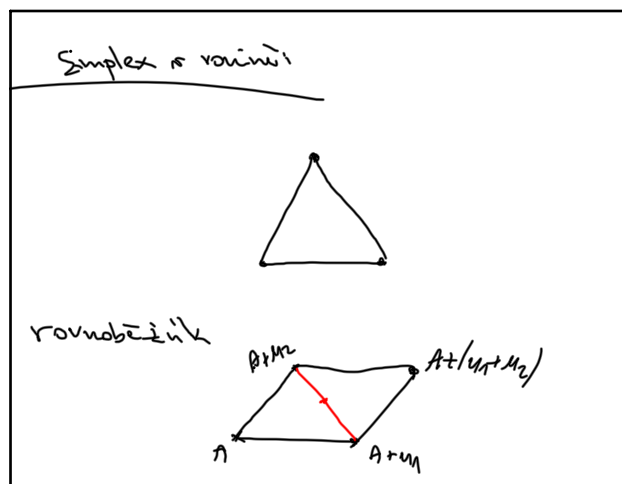
4 30-11:16



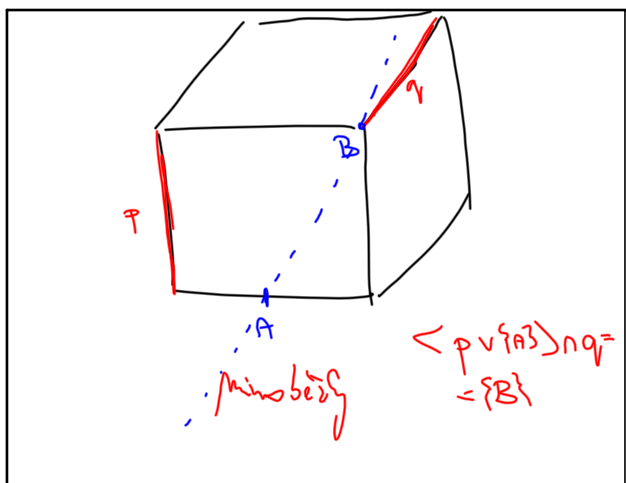
4 30-11:21



4 30-11:24



4 30-11:28



4 30-11:37