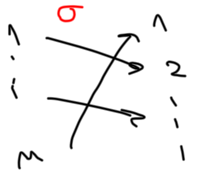
Permutace na $X=\{1,\dots,n\}$



prosté, surjektivní

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

Př: $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ transpozice $(1,3)$

3 26-9:58

Permutace na $\{1,2\}$

$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$

$+\,a_{11}\cdot a_{22}$ $\quad -\,a_{12}\cdot a_{21}$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad \det A = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

3 26-10:12

$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$, $\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

počet inverzí $\begin{pmatrix}a<b\\ \sigma(a)>\sigma(b)\end{pmatrix}$

1,2 ✓
1,3 ✓
2,3 ✓

3 inverze ⇒ permutace je lichá

3 26-10:16

Věta (Det)

indukcí, $n=1$ nebo $n=2$ zřejmé

obecné n, platí pro $n-1$, uvažme permutaci $\begin{pmatrix}1 & \cdots & n-1 & n\\ a_1\, a_2 \cdots & & a_{n-1} & a_n\end{pmatrix}$ podle IP

umíme seřadit perm. $a_1,\dots,a_{n-1}$ do posloupnosti $(n-1)!$

počínaje $a_1,\dots,a_{n-1}$; prohodíme transpozicí a_n s prvkem, který dosud nebyl „poslední"; podle IP seřadíme prvních $n-1$ členů do posloupnosti, ...

Celkem máme $n\cdot(n-1)!$ členů, tj. všech permutací na n-prvkové množině.

3 26-10:20

každá transpozice mění paritu:

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n\\ a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} & & a_n\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & \cdots & i & i+1 & \cdots & n\\ a_1 & & a_{i+1} & a_i & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

počet inverzí r $\qquad$ p. i. $r\pm 1$

$c<i$ $\qquad c<i+1$

$a_c>a_i$ $\qquad a_c>a_i$

anal. další případy.

Jediná změna:

$i, i+1$ není inv. $\qquad i$ $i+1$ je inverze

$a_i<a_{i+1}$ $\qquad a_{i+1}>a_i$

a naopak

3 26-10:26

i nesousední transpozice mění paritu

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots\\ & & a_i & \cdots & a_j & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots\\ & & a_j & \cdots & a_i & \end{pmatrix}$$

$a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j$

$a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_j, a_i$ $\quad$ $j-i$ sousedních transpozic

$a_j, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{j-1}, a_i$ $\quad$ $j-i-1$ sous. transpozic

Celkem $(j-i)+(j-i-1)=\underbrace{2(j-i)-1}_{\text{sous. transpozic}}$

Proto se změnila parita.

3 26-10:32

Při volbě pro n=3

$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&\boxed{3}\end{pmatrix}$ IP $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&\boxed{3}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&\boxed{2}\end{pmatrix}$ IP $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&\boxed{2}\end{pmatrix}$

2! končí 3 | 2! končí 2

$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&\boxed{1}\end{pmatrix}$ IP $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&\boxed{1}\end{pmatrix}$

3 26-10:36

$\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$

$\tau^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}$ $id = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$

$\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) \stackrel{?}{=} \operatorname{sgn}(\tau)$

$\operatorname{sgn}(\tau\circ\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)\cdot\operatorname{sgn}(\tau^{-1})$

$\operatorname{sgn}(id) = +1 = \begin{cases}1\cdot 1\\(-1)\cdot(-1)\end{cases}$

3 26-10:42

Př: $\tau = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}$

součin nezávislých cyklů

$(1,3,2)(4,5)$

složení transpozic

$(1,2)\circ(1,3)\circ(4,5)$

$(a_1,\dots,a_k) = (a_1 a_k)\circ(a_1 a_{k-1})\circ\dots\circ(a_1,a_2)$

3 26-10:44

$A = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&&\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \underbrace{\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)}\cdot a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}}_{\text{člen determinantu}}$

(1)

$\det A^T = \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a'_{1\sigma(1)}\cdots a'_{n\sigma(n)}$

$[a'_{ij} = a_{ji}]$ $= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$

$= \sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$

$\tau = \sigma^{-1}$

$= \sum_{\tau\in S_n}\operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)} = \det(A)$

3 26-10:51

(2) ✓

(5)

$A = \begin{pmatrix}a_{11}&-&-&\cdot\\ b_{k1}+c_{k1}&b_{k2}+c_{k2}&\cdots\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}a_{11}&-&-\\ b_{k1}&b_{k2}&\cdots\\ \vdots&&\end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix}a_{11}&-&-\\ c_{k1}&c_{k2}&\cdots\\ \vdots&&\end{pmatrix}$

distr. zákon $\Rightarrow |A| = |B| + |C|$

3 26-10:53

(4) a) matice A se dvěma stejnými řádky

$\Rightarrow \det A = 0$

(plyne z (3))

– přidání jiného řádku

$A \Rightarrow \begin{pmatrix}\cdot&\cdot&-&-\\ -&-&-&-\\ a_{k1}+a_{j1}&a_{k2}+a_{j2}&\cdots\end{pmatrix} = A' =$

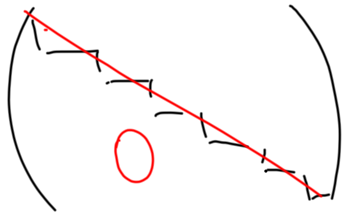
$|A| = |B| + |C|$

$B = A$, $C = \begin{pmatrix}-&-&-\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\ a_{j1}&\cdots&a_{jn}\end{pmatrix}$

$|C| = 0$

3 26-11:02

det matice ve schodovitém tvaru



$$\det A = a_{11} \cdot a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$$

3 26-11:09

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\8\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\-2\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

submatice např. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

příslušný minor $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -23$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

alg. doplněk prvku a_{12} je $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2}$

3 26-11:22

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rozvoj podle 1. sloupce:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}$$

3 26-11:30

blokově

$$H = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline E_m & B \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ & & & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

3 26-11:33