báze ... LN systém generátorů

... max. systém LN vektorů

... min. systém generátorů prostoru

u souřadnice $[a_1,\dots,a_n]_{\underline{v}}$

w souřadnice $[b_1,\dots,b_n]_{\underline{v}}$

$u = a_1\cdot\underline{v_1} + a_2\cdot\underline{v_2} + \dots + a_n\cdot\underline{v_n}$

$w = b_1\,\underline{v_1} + a_2\cdot\underline{v_2} + \dots + b_n\cdot\underline{v_n}$

$u + w = (a_1+b_1)\cdot\underline{v_1} + \dots + (a_n+b_n)\cdot\underline{v_n}$

4 16-9:57

$T^{-1}\cdot[w]_e = (T^{-1}\cdot T)\cdot[w]_u$ $\big|\ T^{-1}\cdot$ (zleva)

neznámé

$$T^{-1}\cdot[w]_e = [w]_u$$

$$b = a\cdot x \iff x = \frac{b}{a}$$

4 16-10:23

Báze a souřadnice Lineární zobrazení Maticová reprezentace lineárních zobrazení

Příklad

Polynom $p(x) = kx + q$ má ve standardní bázi $\mathbf{e} = (x, 1)$ prostoru lineárních polynomů souřadnice

$$[p(x)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix},$$

zatímco v bázi $\mathbf{u} = (x-1, x+1)$ má polynom $p(x)$ souřadnice

$$[p(x)]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{k-q}{2} \\ \frac{k+q}{2} \end{pmatrix},$$

protože $p(x) = kx + q = \frac{k-q}{2}\cdot(x-1) + \frac{k+q}{2}\cdot(x+1)$.

m. přechodu od $\underline{u}$ k $\underline{e}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

od $\underline{e}$ k $\underline{u}$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

polynom $kx+q$ má souř. $[k, q]_e$,

proto $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k-q}{2} \\ \frac{k+q}{2} \end{pmatrix}$

jsou souř. vzhl. k $\underline{u}$

4 16-10:27

Lin. zobrazení $f: V \to W$

$\iff \forall a,b \in K,\ u,v \in V$:

$$f(a\cdot u + b\cdot v) = a\cdot f(u) + b\cdot f(v)$$

$f(x) = x^2$ $\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x+y) \neq f(x) + f(y)$

$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2$

4 16-10:35

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\cup$

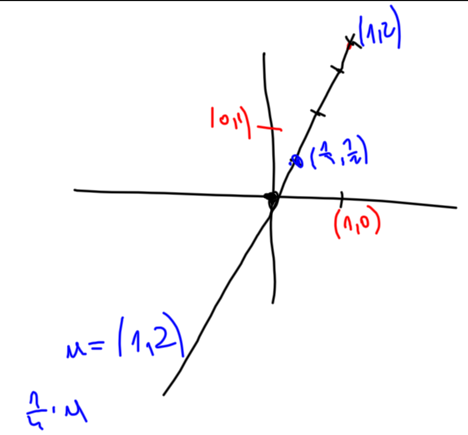
u

$$\underset{m/n}{A}\cdot\underset{n/1}{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}} = \underset{m/1}{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}}$$

$A\cdot(u + w) = A\cdot u + A\cdot w$

$A\cdot(a\cdot u) = a\cdot(A\cdot u)$

4 16-10:38



4 16-10:40

Př: otáčení $\mathbb{R}^2$ o $\frac{\pi}{2}$:

$$L((x,y)) = (-y,x)$$

linearita: $(-y_1-y_2, x_1+x_2)$

$$L((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \overset{?}{=} L((x_1,y_1)) + L((x_2,y_2))$$

$$(-y_1,x_1) + (-y_2,x_2)$$

4 16-10:43

posunutí není lineární

v $\mathbb{R}^2$: $f((x,y)) = ((x+2,y+3))$

$$f(2\cdot(x,y)) \overset{?}{=} 2\cdot f((x,y))$$

$$(2x+2, 2y+3) \neq (2x+4, 2y+6)$$

4 16-10:49

$f: V \to W$

$\mathrm{Im}\, V$ je vekt. podprostor

$v, u \in \mathrm{Im} V \overset{?}{\Rightarrow} u+v \in \mathrm{Im} V$

$\exists\, \bar{u}, \bar{v} \in V$: $\left.\begin{matrix} f(\bar{u}) = u \\ f(\bar{v}) = v \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) = u + v$

analogicky $a \cdot u \in \mathrm{Im} V$ $\forall a \in \mathbb{R}$

4 16-10:54

Jádro Ker f:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1 + 2x_2 - x_3$

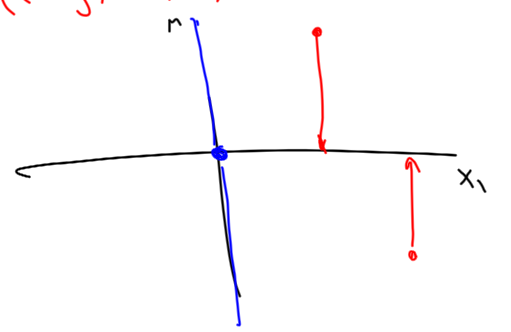
$\mathrm{Ker} f = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$

to je zřejmě vekt. podpr.

$\left.\begin{matrix}(x_1,x_2,x_3) \\ (y_1,y_2,y_3)\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3) = 0$

4 16-10:56

$L_1((x,y)) = (x,0)$



4 16-11:02

Dk. Věty:

(1) $f(0\cdot u) \overset{\text{lin.zobr.}}{=} 0 \cdot f(u)$

$\quad\; = f(0) \qquad = 0$

(3) $f(-u) \qquad -f(u)$

$f((-1)\cdot u) \overset{\text{lin.zobr.}}{=} -1 \cdot f(u)$

4 16-11:03

Důk:

4 16-11:06

1. Složení $g \circ f : V \to Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \to W$ a $g : W \to Z$ je opět lineární zobrazení.

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

$u, v \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(a \cdot u + b \cdot v) \overset{?}{=} a \cdot (g \circ f)(u) + b \cdot (g \circ f)(v)$$

$$= g(f(a \cdot u + b \cdot v))$$

$\overset{f \text{ lin.z.}}{=}$ $g(a \cdot f(u) + b \cdot f(v))$

$\overset{g \text{ lin.z.}}{=}$ $a \cdot g(f(u)) + b \cdot g(f(v))$

4 16-11:07

lin. zobrazení je určeno $(v_1, \dots, v_n)$ obrazem bázových vektorů

u lib. vektor, $u = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ jednoznačně

$$f(u) = f(a_1 \cdot \underline{v_1} + \dots + a_n \cdot \underline{v_n}) =$$

$$= a_1 \cdot f(\underline{v_1}) + \dots + a_n \cdot f(\underline{v_n})$$

4 16-11:16

Báze a souřadnice · Lineární zobrazení · Maticová reprezentace lineárních zobrazení

$$L((x_1, x_2, x_3)) = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (x_3 - x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

Příklad

Nechť $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je pro dáno předpisem:

$$L(u) = x_1 v_1 + (x_3 - x_2) v_2,$$

kde $u = (x_1, x_2, x_3)^T$, $v_1 = (2, -1)^T$, $v_2 = (1, -2)^T$. Určete matici A, která reprezentuje toto lineární zobrazení

(a) v bázích $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ a $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ (standardní báze prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$),

(b) v bázích $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

$$= \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

4 16-11:22

Báze a souřadnice · Lineární zobrazení · Maticová reprezentace lineárních zobrazení

Uvažujme libovolné vektorové prostory U, V nad $\mathbb{K}$ s dim $U = n$, dim $V = m$ a mějme lineární zobrazení $f : U \to V$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na U, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$ na V, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \underline{u}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow\underline{v} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_{\underline{u},\underline{v}}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

souřadnice v závislosti na $\underline{u}$ · souř. vzhl. k $\underline{V}$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$.

4 16-11:15

4 16-11:16

4 16-11:15