Democvičení
MB101 - jaro 2012
22. února 2012

Příklad 1. Určete všechna komplexní čísla z splňující rovnost

$$\overline{z} = \frac{1}{z}.$$

Příklad 2. V závislosti na komplexním parametru p řešte v $\mathbb{C}$ rovnici

$$(3+4i)x - (2+2i)x = 3 - 5i + px.$$

Příklad 3. Dokažte, že pro libovolné reálné číslo p je komplexní číslo $\frac{p-i}{1+pi}$ ryze imaginární.

Příklad 4. Určete všechna komplexně sdružená čísla $x, y \in \mathbb{C}$ tak, aby platila rovnost

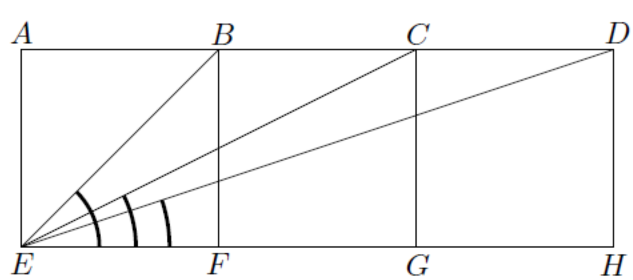
$$(i-2)x - 2iy = i.$$

Příklad 5. Nechť $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Dokažte, že

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Příklad 6. Geometricky interperetujte násobení komplexního čísla komplexní jednotkou.

Příklad 7. Máme vedle sebe tři čtverce $ABFE$, $BCGF$ a $CDHG$ jako na obrázku. Pomocí komplexních čísel dokažte, že je součet vyznačených úhlů $\frac{\pi}{2}$.



Příklad 8. V Gausově rovině zobrazte všechna komplexní čísla, která splňují

1. $|1+i| \geq |z| > \frac{1}{2}$
2. $|z| \geq 1 \wedge |z-i| \geq |z| \wedge |z-1| \geq 1$
3. $|z| \geq 2 \wedge |z+1-i| \leq \sqrt{2} \wedge |z-1-i| \leq \sqrt{2}$

Příklad 9. Nechť n je přirozené číslo. Určete součet

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots .$$

Příklad 10. Geometricky interpretujte komplexní n-té odmocniny z 1.

Příklad 11. Označme $x_0, \dots, x_{n-1}$ všechna řešení binomické rovnice $x^n = 1$. Potom pro libovolné přirozené číslo n platí

a) Jestliže $n|p$, potom

$$x_0^p + x_1^p + \dots + x_{n-1}^p = n.$$

b) Jestliže $n \nmid p$, potom

$$x_0^p + x_1^p + \dots + x_{n-1}^p = 0.$$