

Democvičení
M B101 - jaro 2012
29. února 2012

Příklad 1. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí, že

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Příklad 2. Určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 2012$$

1. v oboru \mathbb{N}_0
2. v oboru \mathbb{N}

Příklad 3. V rovině je dáno 2012 bodů, z nichž 112 leží na jedné kružnici a žádné další čtyři na jedné kružnici neleží. Určete, kolik různých kružnic je těmito body jednoznačně zadáno.

Příklad 4. Určete, kolika způsoby můžeme rozmístit na šachovnici $n \times n$ polí k věží tak, aby se žádné dvě navzájem neohrožovaly.

Příklad 5. Určete, kolika způsoby můžeme z čísel $1, \dots, 100$ vybrat tři různá čísla tak, aby jedno z nich bylo aritmetickým průměrem zbývajících dvou.

Příklad 6. Nechť M je konečná n prvková množina. Kolik existuje dvojic množin A, B takových, že $A \subseteq B \subseteq M$.

Příklad 7. Kolika způsoby lze z karetní hry (32 karet, 4 barvy) vybrat šest karet tak, aby mezi nimi byly karty všech čtyř barev.

Příklad 8. Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z cifer 1, 2, 3, 4, jestliže všechny cifry každého z čísel jsou různé.

Příklad 9. Házíme třemi klasickými nefalšovanými šestistěnnými kostkami. S jakou pravděpodobností

1. padne na všech kostkách sudé číslo?
2. padne součet 8?
3. na všech kostkách padne číslo větší než 3?
4. nastanou předchozí tři možnosti zároveň?
5. nastane alespoň jedna z prvních tří možností?

Příklad 10. Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolené šesticiferné číslo bude mít ve svém ciferném zápisu:

1. číslici 1 právě jednou
2. každou z číslic 7 a 9 právě dvakrát.
3. každou z číslic 7 a 9 právě třikrát.
4. alespoň jednu sudou číslici.

Příklad 11. V sáčku je 6 žlutých a 7 oranžových gumových medvídků. Náhodně vytáhneme bonbón, za ním další a pak další. S jakou pravděpodobností jsme snědli jeden žlutý a dva oranžové?

Příklad 12. Házíme 12 kostkami. S jakou pravděpodobností padne každé číslo právě dvakrát?

Příklad 13. Pravděpodobnost, že náhodně vybraný student složí zkoušku je 0,4. Kolik nejméně studentů musí jít na zkoušku, abychom s pravděpodobností alespoň 0,99 mohli říci, že uspěje alespoň jeden.

Příklad 14. Při karetní hře Poker se rozdává 5 karet z balíčku 104 karet (4 barvy, každá barva má 13 karet s hodnotami 2, 3, ..., 10, *J*, *Q*, *K*, *A*). Jaká je pravděpodobnost, že dostaneme do ruky

1. 5 karet s různou hodnotou?
2. 5 karet stejné barvy?
3. 3 trojky a 2 dvojky?

Příklad 15. Do restaurace přišlo n hostů a své kloubouky odložili na věšák. Při odchodu si všichni berou zpět tyto kloubouky náhodně. Určete pravděpodobnost, že alespoň jeden host nebude mít svůj vlastní kloubouk.