Democvičení

MB101 - jaro 2012

28. března 2012

Příklad 1. Dokažte, že množinavšech čtvercových matic n-tého řádu s reálnými koeficienty tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, kde sčítání matic definujeme po složkách a násobení reálným číslem také.

Příklad 2. Rozhodněte, zda množina $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, jestliže je operace $\oplus$ definována vztahem. $(a, b) \oplus (x, y) = (a \cdot x, b + y)$ a násobení skalárem je definováno $t \odot (x, y) = (tx, ty)$. Rozhodněte, které z podmínek vektorového prostoru platí a které nikoliv.

Příklad 3. Rozhodněte, zda je množina $\{(x, 0, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, jestliže je sčítání definováno vztahem $(x, 0, 1) \oplus (y, 0, 1) = (x + y, 0, 1)$ a násobení skalárem je definování

1. $t(x, 0, 1) = (t^2x, 0, 1)$
2. $t(x, 0, 1) = (tx, 0, 1)$
3. $t(x, 0, 1) = (tx, 0, t)$
4. $t(x, 0, 1) = (x, 0, 1)$

Příklad 4. Rozhodněte, zda tvoří $\mathbb{Q}^3$ vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$, jestliže je násobení skalárem definováno klasicky po složkách a sčítání je definováno vztahem

1. $(a, b, c) \oplus (x, y, z) = (a - y, x - b, c + z)$
2. $(a, b, c) \oplus (x, y, z) = (|a - x|, b + y, 0)$
3. $(a, b, c) \oplus (x, y, z) = (-a - x, -b - y, -c - z)$

Příklad 5. Rozhodněte, zda množina U tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, jestliže

1. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + d = 0 \right\}$
2. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \right\}$
3. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$
4. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} \right\}$

5. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$
6. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 0 \right\}$
7. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\}$
8. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a \cdot b \cdot c \cdot d = 0 \right\}$
9. $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \text{součin prvků v prvním i ve druhém řádku, v prvním i druhém sloupci je nulový} \right\}$

Příklad 6. Rozhodněte, zda množina M tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}_5[x]$.

1. $M = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f(0) \cdot f(1) = 0\}$
2. $M = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid x^2 + 1 | f\}$
3. $M = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f \text{ nemá reálný kořen}\}$
4. $M = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = \cdots = 0\}$
5. $M = \{f \in \mathbb{R}_5[x] \mid f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0\}$

Příklad 7. Uvažujme vektorový prostor matic řádu 3, které jsou symetrické a které mají součet prvků v každém jednotlivém řádku roven 0 a současně mají součet prvků v každém jednotlivém sloupci roven 0 a současně mají součet prvků na hlavní diagonále roven 0.