

Democvičení
M B101 - jaro 2012
4. dubna 2012

Příklad 1. Rozhodněte, zda jsou vektory $(1, -1, 0, 2)$, $(2, 2, -1, 3)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(3, 2, 0, 5)$ lineárně nezávislé. Určete dimenzi podprostoru, který dané vektory generují.

Příklad 2. Je dán podprostor $U = \langle 1 + 2x - x^2, 2 - x + x^2, 5 + x^2 \rangle$ v $\mathbb{R}_2[x]$. Zjistěte, zda $1 + x + x^2 \in U$.

Příklad 3. Ve vektorovém prostoru $\text{Mat}_{22}(\mathbb{R})$ napište vektor $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Příklad 4. Necht'

$$U_1 = \langle (4, 0, -2, 6), (2, 1, -2, 3), (3, 1, -2, 4) \rangle,$$
$$U_2 = \langle (1, -1, 0, 2), (2, 2, -1, 3), (0, 1, 1, 0) \rangle.$$

Určete $U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$.

Příklad 5. Určete bázi a dimenzi $U = \{f \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(2012) = f(2011) = 0\}$ v $\mathbb{R}_n[x]$.

Příklad 6. Uvažujme vektorový prostor $\text{Mat}_{22}(\mathbb{R})$ a podmnožinu U matic $A = (a_{ij})$ takových, že $a_{11} + a_{22} = 0$.

1. Dokažte, že U je podprostor
2. Určete dimenzi a bázi
3. Doplňte tuto bázi na celou bázi $\text{Mat}_{22}(\mathbb{R})$
4. Vyjádřete pomocí této báze jednotkovou matici

Příklad 7. Necht' V je reálný vektorový prostor, $v_1, \dots, v_n \in V$. Označme

$$S = \{(c_1, \dots, c_n) \mid c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0\}$$

Dokažte následující tvrzení

1. S je podprostor \mathbb{R}^n
2. vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ jsou lineárně nezávislé, právě když $\dim S = 0$

Příklad 8. Necht' \mathcal{S} je soustava homogenních lineárních rovnic o n neznámých nad \mathbb{R} . Potom množina všech řešení tvoří podprostor \mathbb{R}^n , jehož dimenze je $n - h(A)$, kde A je matice soustavy. Dokažte.

Příklad 9. Necht' $u_1 = (1, -2, 2, 0)$, $u_3 = (1, -2, 2, 3)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $u_4 = (2, t, 6, 3)$. Určete, pro které hodnoty parametru t je vektor u_4 lineární kombinací

Příklad 10. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány podprostory $W_1 = \{(x, y, z) \mid x = 2y + 3z\}$, $W_2 = \{(r, -2r, -3r) \mid r \in \mathbb{R}\}$. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda součet $W_1 + W_2$ je přímým součtem.