Jméno: **Místnost:** **1. vnitrosemestrální písemka**

list *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 1
5 bodů

Je dána n-prvková množina M. Určete počet všech symetrických relací na množině M, které nebudou reflexivní. Své tvrzení zdůvodněte.

Označme tuto relaci $R \subseteq M \times M$. To, že relace není reflexivní, znamená, že $(a,a) \notin R$ pro nějaké $a \in M$. Symetričnost, znamená, že pokud je v relaci prvek a, b pro $a \neq b$, musí být v relaci nutně i prvek (b,a), jinak nastává spor s vlastností symetrie.
Pro každou dvojici různých prvků a, b, musí být v R buď (a,b) i (b,a), nebo ani jeden z nich. Máme tak pro každou dvojici různých prvků, kterých je $\frac{n(n-1)}{2}$, celkem 2 možnosti, proto je celkový počet různých relací splňující vlastnost ze zadání

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (2^n - 1).$$

Příklad 2
10 bodů

Na množině $\mathbb{Z}$ je dána relace σ vztahem:

$$(a,b) \in \sigma \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = b + 3c.$$

Rozhodněte, zda je relace σ reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a úplná. Své tvrzení zdůvodněte.

1. Reflexivní: ano
$$a = a + 3 \cdot 0$$
2. Symetrická: ano
$$(a,b) \in \sigma \Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z} : a = b + 3c \Rightarrow b = a + 3(-c) \Rightarrow (b,a) \in \sigma$$
3. Antisymetrická: ne
$$(1,4) \in \sigma \wedge (4,1) \in \sigma \text{ ale } 1 \neq 4$$
4. Tranzitivní: ano
$$\begin{aligned} (a,b) \in \sigma \wedge (b,c) \in \sigma \Rightarrow \\ \exists d, e \in \mathbb{Z} : a = b + 3d, b = c + 3e \Rightarrow \\ a = c + 3(e + d) \Rightarrow \\ (a,c) \in \sigma \end{aligned}$$
5. Úplná: ne, ani $(1,2)$, ani $(2,1)$ nejsou v σ

Jméno: **Místnost:** **1. vnitrosemestrální písemka**

list 2 učo body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Příklad 3
15 bodů

Jsou dána zobrazení $f, g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vztahem

$$f((x,y)) = (x+y, 2y+1), \qquad g((x,y)) = (x^2+y, x), \text{ pro } x, y \in \mathbb{Z}.$$

a) Rozhodněte, zda je zobrazení f injektivní, surjektivní, bijektivní. Své tvrzení zdůvodněte.

b) Určete předpis zobrazení $f \circ g$.

a) Snadno rozepsáním dostaneme, že zobrazení je injektivní, stačí srovnat druhé složky a dosadit do složek prvních. Zobrazení však není surjektivní, protože například $(0,0)$ nemá svůj vzor.

b)

$$\begin{aligned} g \circ f((x,y)) = g(f((x,y))) = g((x+y, 2y+1)) &= ((x+y)^2 + (2y+1), x+y) = \\ &= (x^2 + 2xy + y^2 + 2y + 1, x+y) \end{aligned}$$

Jméno: **Místnost:** **1. vnitrosemestrální písemka**

list 3 *učo* *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 4
10 bodů

Střelec opakovaně střílí do terče. Pravděpodobnost, že zasáhne, je při každém výstřelu $0,3$. Kolikrát nejméně musí vystřelit, abychom s pravděpodobností alespoň $0,95$ mohli říci, že se trefí alespoň jednou. Své tvrzení zdůvodněte.

Jev „trefí alespoň jednou“ označme A, je jevem opačným k jevu „netrefí ani jednou“. Pravděpodobnost, že se netrefí ani jedním z n pokusů je $0,7^n$. Proto

$$P(A) = 1 - 0,7^n$$

Chceme, aby tato pradvděpodobnost byla vyšší než $0,95$. Stačí vyřešit rovnici

$$\begin{aligned} 1 - 0,7^n &\geq 0,95 \\ 0,05 &\geq 0,7^n \\ \ln(0,05) &\geq n \cdot \ln(0,95) \\ n &\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7)} \\ n &\geq 8,399\ldots \end{aligned}$$

Jelikož má být výsledek zjevně přirozené číslo, je dostatečný počet výstřelů roven 9.

Jméno: **Místnost:** **1. vnitrosemestrální písemka**

list 4

učo *body*

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Příklad 5
10 bodů

Určete všechna komplexní čísla z, která splňují rovnost

$$\overline{z} \cdot (z - 1) = |z|^2.$$

Komplexní číslo z dosadíme ve tvaru $z = a + bi$

$$\begin{aligned}(a - bi)(a + bi - 1) &= |a + bi|^2 \\ a^2 + b^2 - a + bi &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Porovnáme reálné a komplexní části a dostáváme dvě rovnice:

$$\begin{aligned}b &= 0 \\ a^2 + b^2 - a &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Z obou rovnic je hned vidět, že jediné řešení je $b = 0$ a $a = 0$, tudíž hledané $z = 0$.

Jiné řešení: nic nedosazujeme, roznásobíme rovnici a dosadíme známý fakt, že $|z|^2 = z\bar{z}$

$$\begin{aligned}\bar{z}z - \bar{z} &= \bar{z}z \\ \bar{z} &= 0\end{aligned}$$

tudíž i $z = 0$.

Jméno: **Místnost:** **1. vnitrosemestrální písemka**

1111 ***list*** 5 ***učo*** ***body***

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789