

Jméno:

Místnost:

1. vnitrosemestrální písemka

2222

list

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Je dána  $n$ -prvková množina  $M$ . Určete počet všech antisymetrických relací na množině  $M$ , které jsou zároveň reflexivní. Svě tvrzení zdůvodněte.

**Příklad 1**  
5 bodů

Označme tuto relaci  $R \subseteq M \times M$ . To, že je relace reflexivní, znamená, že  $(a, a) \in R$  pro libovolné  $a$ . Antisymetričnost znamená, že pokud je v relaci již prvek  $a, b$  pro  $a \neq b$ , nesmí být v relaci prvek  $(b, a)$ , jinak nastává spor s vlastností antisymetrie

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b.$$

Pro každou dvojici různých prvků  $a, b$ , může být v  $R$  buď  $(a, b)$ , nebo  $(b, a)$ , nebo ani jeden z nich. Máme tak pro každou dvojici různých prvků, kterých je  $\frac{n(n-1)}{2}$ , 3 možnosti, proto je celkový počet různých relací splňující vlastnost ze zadání

$$3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Na množině  $\mathbb{Z}$  je dána relace  $\rho$  vztahem:

**Příklad 2**  
10 bodů

$$(x, y) \in \rho \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : x - y = 5z.$$

Rozhodněte, zda je relace  $\rho$  reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní a úplná. Svě tvrzení zdůvodněte.

1. Reflexivní: ano

$$x - x = 5 \cdot 0$$

2. Symetrická: ano

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : x - y = 5z \Rightarrow y - x = 5(-z) \Rightarrow (y, x) \in \rho$$

3. Antisymetrická: ne

$$(1, 6) \in \rho \wedge (6, 1) \in \rho \text{ ale } 1 \neq 6$$

4. Tranzitivní: ano

$$\begin{aligned} (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho &\Rightarrow \\ \exists u, v \in \mathbb{Z} : x - y = 5u, y - z = 5v &\Rightarrow \\ x - z = 5(u + v) &\Rightarrow \\ (x, z) \in \rho & \end{aligned}$$

5. Úplná: ne, ani  $(1, 2)$ , ani  $(2, 1)$  nejsou v  $\rho$

Jméno:

Místnost:

1. vnitrosemestrální písemka

2222

list

2

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Jsou dána zobrazení  $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  vztahem

**Příklad 3**

**15 bodů**

$$f((x, y)) = (3x + 5, 2y - x), \quad g((x, y)) = (y, y^2 + x), \quad \text{pro } x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Rozhodněte, zda je zobrazení  $f$  injektivní, surjektivní, bijektivní. Své tvrzení zdůvodněte.
- b) Určete předpis zobrazení  $g \circ f$ .

- a) K danému zobrazení existuje inverzní zobrazení  $f^{-1} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$f^{-1}(x, y) = \left( \frac{x - 5}{3}, \frac{3y + x - 5}{6} \right)$$

je tedy injektivní, surjektivní i bijektivní.

- b)

$$\begin{aligned} g \circ f((x, y)) &= g(f((x, y))) = g((3x + 5, 2y - x)) = (2y - x, (2y - x)^2 + (3x + 5)) = \\ &= (2y - x, x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x + 5) \end{aligned}$$

Jméno:

Místnost:

1. vnitrosemestrální písemka

2222

list

3

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Ve 3.B studuje kromě Macha a Šebestové dalších 9 chlapců (mezi nimi samozřejmě známé firmy Horáček s Pažoutem) a 14 dívek. V hodině matematiky se rozhodla paní učitelka zkusit dva různé žáky. Mach se rozhodl, že ověří inteligenci kouzelného sluchátka, a tak zavolal:

**Příklad 4**  
**10 bodů**

- Haló, haló, můžete mi říci, s jakou pravděpodobností bude druhým zkoušeným žákem chlapec? Své tvrzení zdůvodněte.
- Haló, haló, s jakou pravděpodobností budou dnes zkoušení Horáček s Pažoutem? Své tvrzení zdůvodněte.

Celkem je ve třídě 10 chlapců a 15 dívek.

- Mohou nastat dvě situace: buď je prvním zkoušeným chlapec nebo děvče. Pravděpodobnost, že je to chlapec je  $\frac{10}{25}$ , pravděpodobnost, že děvče  $\frac{15}{25}$ . Protože chce paní učitelka zkusit dva různé žáky, zůstane po prvním zkoušení ve třídě 24 kandidátů na místo druhého zkoušeného, přičemž je mezi nimi: v prvním případě 9 chlapců, v druhém 10 chlapců. Výsledná pravděpodobnost je tedy:

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} + \frac{15}{25} \cdot \frac{10}{24} = 0,4$$

- Celkem může být vyzkoušeno  $\binom{25}{2}$  různých dvojic, z nichž jen jedna je slavné duo. Výsledná pravděpodobnost je

$$\frac{2}{2\binom{25}{2}} = \frac{1}{300}$$

Jméno:

Místnost:

1. vnitrosemestrální písemka

2222

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

Určete všechna komplexní čísla  $z$ , která splňují rovnost

Příklad 5

10 bodů

$$z \cdot \bar{z} - z = |2\sqrt{5} - 4i| + 2i.$$

Komplexní číslo  $z$  dosadíme ve tvaru  $z = a + bi$

$$(a + bi)(a - bi) - (a + bi) = |2\sqrt{5} - 4i| + 2i$$

$$a^2 + b^2 - a - bi = 6 + 2i$$

Porovnáme reálné a komplexní části a dostáváme dvě rovnice:

$$-b = 2$$

$$a^2 + b^2 - a = 6$$

Z první rovnice je hned vidět řešení  $b = -2$ , dosazením do druhé rovnice dostáváme kvadratickou rovnici

$$a^2 - a - 2 = 0$$

která má dvě řešení:  $a = 2$  nebo  $a = -1$ .

Celkem máme tedy dvě řešení:

$$z = -1 - 2i$$

$$z = 2 - 2i$$