

Jméno:

Místnost:

2. vnitrosemestrální písemka

	<i>list</i>	<i>učo</i>	<i>body</i>
--	-------------	------------	-------------

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Nechť je dán vektorový prostor $\mathbb{R}_4[x]$ všech polynomů stupně nejvýše 4 nad reálnými čísly. Označme $M = \{f \in \mathbb{R}_4[x] \mid f(5) = 0\}$.

Příklad 1
10 bodů

1. Dokažte, že M tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}_4[x]$.
2. Určete dimenzi a nějakou bázi M .

Je potřeba ukázat, že pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a libovolné $f, g \in M$, $f(5) = 0$, $g(5) = 0$ je i $\alpha f + \beta g \in M$. Jistě je $\alpha f + \beta g$ polynom stupně nejvýše 4,

$$(\alpha f + \beta g)(5) = \alpha f(5) + \beta g(5) = 0$$

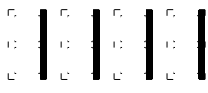
tudíž i $\alpha f + \beta g \in M$.

Dimenze M bude o jedna nižší než dimenze $\mathbb{R}_4[x]$, tj. 4, bázi tvoří např. polynomy $x^4 - 625, x^3 - 125, x^2 - 25, x - 5$.

Jméno:

Místnost:

2. vnitrosemestrální písemka



list



učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Svě UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány podprostory

Příklad 2
10 bodů

$$U = \langle (1, 0, 2, 1), (2, 1, 0, 2), (0, 1, -4, 0) \rangle, \quad V = \langle (1, 2, 0, 0), (0, 1, 2, 0) \rangle.$$

1. Určete bázi a dimenzi $U + V$. Svě tvrzení zdůvodněte.
2. Určete dimenzi $U \cap V$ a rozhodněte, zda je součet $U + V$ přímý. Svě tvrzení zdůvodněte.

Je vidět (nebo lze výpočtem ověřit), že podprostor U je dimenze 2, protože $(2, 1, 0, 2) = 2(1, 0, 2, 1) + (0, 1, -4, 0)$, a lze ho generovat pouze vektory $(1, 0, 2, 1)$ a $(0, 1, -4, 0)$. Podprostor V je také dimenze 2. Dimenzi podprostoru $U + V$ zjistíme tak, že určíme hodnotu matice, která má ve sloupcích generující vektory.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Proto dimenze součtu $U + V$ je 4. Ze vztahu

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

Vyplývá, že dimenze $U \cap V$ je $2 + 2 - 4 = 0$, tj. součet je přímý.

Vyjádřete vektor $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ jako lineární kombinaci vektorů $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ve vektorovém prostoru $\text{Mat}_{22}(\mathbb{R})$.

Příklad 3
5 bodů

Celý problém lze zapsat jako soustavu čtyř rovnic o třech neznámých a, b, c tak, aby

$$a \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$

přepsáno do rozšířené matice soustavy

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

řešení je tedy

$$\begin{aligned} c &= 2 \\ b &= -4 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Jméno:

Místnost:

2. vnitrosemestrální písemka



list



učo



body



Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.



V závislosti na reálném parametru a řešte soustavu rovnic nad reálnými čísly zadanou rozšířenou maticí soustavy

Příklad 4
15 bodů

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1+a-a^2 & a+1 \end{array} \right).$$

Upravíme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1+a-a^2 & a+1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-a^2 & a \end{array} \right)$$

Z třetí rovnice dostáváme

$$a(1-a)z = a$$

Nastávají tři případy v závislosti na parametru a . Buď

1. $a = 0$ a z může nabývat libovolné hodnoty
2. $a \neq 0, a \neq 1$ a $z = \frac{1}{1-a}$
3. $a = 1$ a rovnice, tudíž i celá soustava, nemá řešení

Z druhé rovnice dostáváme pro

1. $a = 0$

$$\begin{aligned} ay + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

2. $a \neq 0, a \neq 1$

$$\begin{aligned} ay + z &= 1 \\ ay + \frac{1}{1-a} &= 1 \\ y &= -\frac{1}{1-a} \end{aligned}$$

Z první rovnice:

1. $a = 0$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y &= 0 \\ y &= -x \end{aligned}$$

2. $a \neq 0, a \neq 1$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 1 \\x - \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-a} &= 1 \\x &= 1\end{aligned}$$

Celkem máme tři možnosti v závislosti na parametru a :

1. $a = 0$, rovnice má řešení $(x, -x, 1)$ s parametrem x ,
2. $a \neq 0, a \neq 1$ a rovnice má právě jedno řešení $(1, -\frac{1}{1-a}, \frac{1}{1-a})$,
3. $a = 1$ a systém rovnic nemá řešení.

Jméno:

Místnost:

2. vnitrosemestrální písemka

list

list

4

učo

body

Oblast strojově snímatelných informací. Své UČO vyplňte zleva dle přiloženého vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Podrobně vypočtěte determinant matice A

Příklad 5

10 bodů

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 27$$