Matematika I – 10. přednáška Ortogonální zobrazení, základy analytické geometrie

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

30. 4. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na `http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/`).

Plán přednášky

1. Ortogonální zobrazení
2. Analytická geometrie
   - Afinní geometrie
   - Základní afinní úlohy

Ortogonální zobrazení

Podívejme se teď na speciální případ zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárními součiny, která zachovávají velikosti pro všechny vektory $u \in V$.

Definice

Lineární zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárním součinem se nazývá **ortogonální zobrazení**, jestliže pro všechny $u \in V$

$$\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle .$$

Ortogonální zobrazení

Podívejme se teď na speciální případ zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárními součiny, která zachovávají velikosti pro všechny vektory $u \in V$.

Definice

Lineární zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárním součinem se nazývá **ortogonální zobrazení**, jestliže pro všechny $u \in V$

$$\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle.$$

Z linearity f a z vlastností skalárního součinu vyplývá pro všechny dvojice vektorů rovnost
$\langle f(u+v), f(u+v) \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle + \langle f(v), f(v) \rangle + 2\langle f(u), f(v) \rangle$.
Proto všechna ortogonální zobrazení splňují i zdánlivě silnější požadavek, aby platilo pro všechny vektory $u, v \in V$

$$\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.
Obecně, ortogonální zobrazení $f : V \to W$ musí být vždy injektivní, protože podmínka $\langle f(u), f(u) \rangle = 0$ znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme $W = V$.

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.
Obecně, ortogonální zobrazení $f : V \to W$ musí být vždy injektivní, protože podmínka $\langle f(u), f(u) \rangle = 0$ znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme $W = V$.
Naše podmínka pro matici A ortogonálního zobrazení v ortonormální bázi pak říká pro všechny vektory x a y v prostoru $\mathbb{R}^n$ toto:

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y = x^T \cdot y.$$

Speciálními volbami vektorů standardní báze za x a y dostaneme přímo, že $A^T \cdot A = E$, tedy tentýž výsledek jako v dimenzi dvě.

Matice ortogonálního zobrazení

Dokázali jsme tak následující tvrzení:

Věta

Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $f : V \to V$ je lineární zobrazení. Pak f je ortogonální, právě když v některé ortonormální bázi (a pak už ve všech) má matici A splňující $A^T = A^{-1}$ (tedy ortogonální matici).

Plán přednášky

Afinní geometrie

Vrátíme se teď k úlohám elementární geometrie z podobného pohledu, jako když jsme zkoumali polohy bodů v rovině.

Afinní geometrie

Vrátíme se teď k úlohám elementární geometrie z podobného pohledu, jako když jsme zkoumali polohy bodů v rovině.

Definice (Afinní prostor)

Standardní afinní prostor $\mathcal{A}_n$ je množina všech bodů v $\mathbb{R}^n$ spolu s operací, kterou k bodu $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ a vektoru $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ přiřadíme bod $A + v = (a_1 + v_1, \dots, a_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$. Tyto operace splňují následující tři vlastnosti:

1. $A + 0 = A$ pro všechny body $A \in P$ a nulový vektor $0 \in V$
2. $A + (v + w) = (A + v) + w$ pro všechny vektory $v, w \in V$, $A \in P$
3. pro každé dva body $A, B \in P$ existuje právě jeden vektor $v \in P$ takový, že $A + v = B$. Značíme jej $B - A$, někdy také $\vec{AB}$.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ nazýváme **zaměření afinního prostoru** $\mathcal{A}_n$.

Proč vlastně chceme rozlišovat množinu bodů prostoru $\mathcal{A}_n$ od jeho zaměření V, když se jedná jakoby o stejné $\mathbb{R}^n$? Je to patrně podstatný formální krůček pro pochopení geometrie v $\mathbb{R}^n$: Geometrické objekty jako jsou přímky, body, roviny apod. nejsou totiž přímo závislé na vektorové struktuře na množině $\mathbb{R}^n$ a už vůbec ne na tom, že pracujeme s n–ticemi skalárů. Musíme ale mít možnost říci, co je to *rovně v daném směru*. K tomu právě potřebujeme na jedné straně vnímat třeba rovinu jako neohraničenou desku bez zvolených souřadnic, ale s možností posunout se o zadaný vektor. Když přejdeme navíc k takovému abstraktnímu pohledu, budeme umět diskutovat *rovinnou geometrii* pro dvourozměrné podprostory, tj. roviny ve vícerozměrných prostorech, *prostorovou* pro třírozměrné atd., aniž bychom museli přímo manipulovat k-ticemi souřadnic.

Definice

Afinním prostorem $\mathcal{A}$ se zaměřením V rozumíme množinu **bodů** P, spolu se zobrazením $P \times V \to P$, $(A, v) \mapsto A + v$, splňující vlastnosti (1)–(3). Pro libovolný pevně zvolený vektor $v \in V$ je tak definována **translace** $\tau_v : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ jako zúžené zobrazení

$$\tau_v : P \simeq P \times \{v\} \to P, \quad A \mapsto A + v.$$

Dimenzí afinního prostoru $\mathcal{A}$ rozumíme dimenzi jeho zaměření.

Všimněme si, že volba jednoho pevného bodu $A_0 \in \mathcal{A}$ nám určuje bijekci mezi V a $\mathcal{A}$. Při volbě pevné báze $\underline{u}$ ve V tak dostáváme pro každý bod $A \in \mathcal{A}$ jednoznačné vyjádření

$$A = A_0 + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Hovoříme o **afinní soustavě souřadnic** $(A_0; u_1, \ldots, u_n)$ zadané **počátkem afinní souřadné soustavy** A_0 a bází zaměření $\underline{u}$.

Afinní podprostory

Jestliže si vybereme v $\mathcal{A}$ jen body, které budou mít některé předem vybrané souřadnice nulové (třeba poslední jednu), dostaneme opět množinu, která se bude chovat jako afinní prostor. Takto budeme skutečně parametricky popisovat tzv. afinní podprostory ve smyslu následující definice.

Afinní podprostory

Jestliže si vybereme v $\mathcal{A}$ jen body, které budou mít některé předem vybrané souřadnice nulové (třeba poslední jednu), dostaneme opět množinu, která se bude chovat jako afinní prostor. Takto budeme skutečně parametricky popisovat tzv. afinní podprostory ve smyslu následující definice.

Definice

Neprázdná podmnožina $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$ afinního prostoru $\mathcal{A}$ se zaměřením V se nazývá **afinní podprostor** v $\mathcal{A}$, je-li podmnožina $W = \{B - A; A, B \in \mathcal{Q}\} \subset V$ vektorovým podprostorem a pro libovolné $A \in \mathcal{Q}$, $v \in W$ je $A + v \in \mathcal{Q}$.

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Pro libovolnou množinu bodů $M \subset \mathcal{A}$ v afinním prostoru se zaměřením V definujeme vektorový podprostor

$$Z(M) = \langle \{B - A; B, A \in M\} \rangle \subset V.$$

Přímo z definic je zřejmé, že průnik libovolné množiny afinních podprostorů je buď opět afinní podprostor nebo prázdná množina. Afinní podprostor $\langle M \rangle$ v $\mathcal{A}$ *generovaný* neprázdnou podmnožinou $M \subset \mathcal{A}$ je průnikem všech afinních podprostorů, které obsahují všechny body podmnožiny M.
Přímo z definic plyne, že pro kterýkoliv bod $A_0 \in M$ je $\langle M \rangle = \{A_0 + v; v \in Z(M) \subset Z(\mathcal{A})\}$, tj. pro generování afinního podprostoru vezmeme vektorový podprostor $Z(M)$ v zaměření generovaný všemi rozdíly bodů z M a ten pak přičteme k libovolnému z nich. Hovoříme také o **afinním obalu** množiny bodů M v $\mathcal{A}$.

Parametrizace podprostorů

Naopak, kdykoliv zvolíme podprostor U v zaměření $Z(\mathcal{A})$ a jeden pevný bod $A \in \mathcal{A}$, pak podmnožina $A + U$ vzniklá všemi možnými součty bodů A s vektory v U je afinní podprostor. Takový postup vede k pojmu parametrizace podprostorů:
Nechť $\mathcal{Q} = A + Z(\mathcal{Q})$ je afinní podprostor v $\mathcal{A}_n$ a $(u_1, \dots, u_k)$ je báze $Z(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{R}^n$. Pak vyjádření podprostoru

$$\mathcal{Q} = \{A + t_1 u_1 + \dots + t_k u_k; t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

nazýváme **parametrický popis** podprostoru $\mathcal{Q}$. Jeho zadání systémem rovnic v daných souřadnicích je **implicitní popis** podprostoru $\mathcal{Q}$.

Příklad

1. Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky $\mathcal{A}_1$. Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}$ (a nosná množina také $\mathbb{R}$). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R.

Příklad

1. Jednorozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů reálné přímky $\mathcal{A}_1$. Její zaměření je jednorozměrný vektorový prostor $\mathbb{R}$ (a nosná množina také $\mathbb{R}$). Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a měřítka (tj. báze ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}$). Všechny vlastní afinní podprostory jsou 0-rozměrné, jsou to právě všechny body reálné přímky R.
2. Trojrozměrný (standardní) afinní prostor je množina všech bodů prostoru $\mathcal{A}_3$ se zaměřením $\mathbb{R}^3$. Afinní souřadnice dostaneme volbou počátku a tří nezávislých vektorů (směrů a měřítek). Vlastní afinní podprostory jsou pak všechny body, přímky a roviny (0-rozměrné, 1-rozměrné a 2-rozměrné).

Příklad

1. Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů $(a_1, \ldots, a_n)$ a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$, tj. tzv. **nadrovina v** A_n.

Příklad

1. Podprostor všech řešení jedné lineární rovnice $a \cdot x = b$ pro neznámý bod $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A}_n$, známý nenulový vektor koeficientů $(a_1, \dots, a_n)$ a skalár $b \in \mathbb{R}$ je afinní podprostor dimenze $n - 1$, tj. tzv. **nadrovina v** A_n.

Poslední příklad je zvláštním případem následující obecné věty popisující geometrickou podstatu systémů lineárních rovnic.

Věta

Nechť $(A_0; \underline{u})$ je afinní souřadný systém v n-rozměrném afinním prostoru $\mathcal{A}$. Afinní podprostory dimenze k v $\mathcal{A}$, vyjádřené v daných souřadnicích, jsou právě množiny řešení řešitelných systémů $n - k$ lineárně nezávislých lineárních rovnic v n proměnných.

Transformace souřadnic

Dvě libovolně zvolené afinní soustavy souřadnic $(A_0, \underline{u})$, $(B_0, \underline{v})$ se obecně liší posunutím počátku o vektor $(B_0 - A_0)$ a jinou bází zaměření. Transformační rovnice tedy vyčteme ze vztahu pro obecný bod $X \in \mathcal{A}$

$$X = B_0 + x_1' v_1 + \cdots + x_n' v_n = B_0 + (A_0 - B_0) + x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n.$$

Označme $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ sloupec souřadnic vektoru $(A_0 - B_0)$ v bázi $\underline{v}$ a $M = (a_{ij})$ buď matice vyjadřující bázi $\underline{u}$ prostřednictvím báze $\underline{v}$. Potom

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= y_n + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

tj. maticově

$$x' = y + M \cdot x.$$

Afinní kombinace bodů

Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0 \dots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako

$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \cdots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k\rangle = \{t_0A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0A_0 + t_1A_1 + \cdots + t_kA_k$ s koeficienty splňujícími $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je **afinní kombinace bodů**.

Afinní kombinace bodů

Nechť $A_0, \dots, A_k$ jsou body v afinním prostoru $\mathcal{A}$. Jejich afinní obal $\langle\{A_0 \dots, A_k\}\rangle$ můžeme zapsat jako

$$\{A_0 + t_1(A_1 - A_0) + \dots + t_k(A_k - A_0); t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

a v libovolných afinních souřadnicích (tj. A_i je vyjádřen sloupcem skalárů) můžeme tutéž množinu zapsat jako

$$\langle A_0, \dots, A_k\rangle = \{t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k; t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Obecně výrazy $t_0A_0 + t_1A_1 + \dots + t_kA_k$ s koeficienty splňujícími $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ rozumíme body $A_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(A_i - A_0)$ a nazýváme je **afinní kombinace bodů**.

Body $A_0 \dots, A_k$ jsou v **obecné poloze**, jestliže generují k-rozměrný podprostor. Z našich definic je vidět, že to nastane právě, když pro kterýkoliv z nich platí, že vektory vzniklé pomocí rozdílů tohoto pevného s ostatními jsou lineárně nezávislé.

Simplex

Nechť $A_0, \ldots, A_k$ je $k+1$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. k–rozměrný **simplex** $\Delta = \Delta(A_0, \ldots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k; t_i \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je **úsečka**, dvourozměrný **trojúhelník**.

Simplex

Nechť $A_0, \dots, A_k$ je $k+1$ bodů afinního prostoru $\mathcal{A}$ v obecné poloze. k–rozměrný **simplex** $\Delta = \Delta(A_0, \dots, A_k)$ generovaný těmito body je definován jako množina všech afinních kombinací bodů A_i s pouze nezápornými koeficienty, tzn.

$$\Delta = \{t_0 A_0 + t_1 A_1 + \cdots + t_k A_k;\, t_i \in [0,1] \subset \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\}.$$

Jednorozměrný simplex je **úsečka**, dvourozměrný **trojúhelník**. Zadání podprostoru jako množiny afinních kombinací bodů v obecné poloze je ekvivalentní parametrickému popisu. Obdobně pracujeme s parametrickými popisy simplexů.

Konvexní množiny

Definice

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$. Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k + 1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex.

Konvexní množiny

Definice

Podmnožina M afinního prostoru se nazývá **konvexní**, jestliže s každými svými dvěma body A, B obsahuje i celou úsečku $\Delta(A, B)$. Přímo z definice je vidět, že každá konvexní množina obsahuje s každými $k+1$ body v obecné poloze i celý jimi definovaný simplex.

Příklad

Konvexními množinami jsou např.
(1) prázdná podmnožina
(2) afinní podprostory
(3) úsečky, polopřímky $p = \{P + t \cdot v;\ t \geq 0\}$, obecněji k–rozměrné poloprostory
$\alpha = \{P + t_1 \cdot v_1 + \cdots + t_k \cdot v_k;\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}, t_k \geq 0\}$, úhly v dvojrozměrných podprostorech
$\beta = \{P + t_1 \cdot v_1 + t_2 \cdot v_2;\ t_1 \geq 0, t_2 \geq 0\}$, atd.

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme **konvexní obal** $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

Věta

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Přímo z definice také plyne, že průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní. Průnik všech konvexních množin obsahujících danou množinu M nazýváme **konvexní obal** $\mathcal{K}(M)$ množiny M.

Věta

Konvexní obal libovolné podmnožiny $M \subset \mathcal{A}$ je

$$\mathcal{K}(M) = \{t_1 A_1 + \cdots + t_s A_s;\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1,\ t_i \geq 0\}$$

Konvexní obaly konečných množin bodů se nazývají **konvexní mnohostěny**. Jsou-li definující body $A_0, \ldots, A_k$ konvexního mnohostěnu v obecné poloze, dostáváme právě k-rozměrný **simplex**. V případě simplexu je vyjádření jeho bodů ve tvaru afinní kombinace definujících vrcholů jednoznačné.

Jiným příkladem jsou konvexní podmnožiny generované jedním bodem a konečně mnoha vektory: Nechť $u_1, \dots, u_k$, jsou libovolné vektory v zaměření $\mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{A}_n$ je libovolný bod. *Rovnoběžnostěn* $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$ je množina

$$\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) = \{A + c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k;\ 0 \le c_i \le 1, i = 1, \dots, k\}.$$

Jsou-li vektory $u_1, \dots, u_k$ nezávislé, hovoříme o k-rozměrném rovnoběžnostěnu $\mathcal{P}_k(A; u_1, \dots, u_k) \subset \mathcal{A}_n$. Z definice je zřejmé, že rovnoběžnostěny jsou konvexní. Ve skutečnosti jde o konvexní obaly jejich vrcholů.

Základní afinní úlohy

K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis

Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis.

Základní afinní úlohy

K podprostoru zadanému implicitně nalézt parametrický popis

Nalezením partikulárního řešení nehomogenního systému a fundamentálního řešení zhomogenizovaného systému rovnic získáme (v souřadnicích, ve kterých byly rovnice zadány) právě hledaný parametrický popis.

Příklad

Parametricky vyjádřete průnik rovin v $\mathbb{R}^3$:

$$\rho : 2x + 3y - z + 1 = 0, \qquad \sigma : x - 2y + 5 = 0.$$

Z parametrického popisu získat popis implicitní

Zapíšeme-li parametrický popis v souřadnicích, můžeme volné parametry $t_1, \dots, t_k$ vyeliminovat a získáme právě rovnice zadávající daný podprostor implicitně.

Nalézt podprostor generovaný několika podprostory

Výsledný podprostor $\mathcal{Q}$ je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \cdots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

Pokud jsou podprostory zadány implicitně, je možné je nejdříve převést na parametrický tvar. V konkrétních situacích bývají funkční i jiné postupy. Všimněme si, že obecně je skutečně nutné využít jednoho bodu z každého podprostoru. Např. dvě paralelní přímky v rovině vygenerují celou rovinu, ale sdílí totéž jednorozměrné zaměření.

Nalézt podprostor generovaný několika podprostory

Výsledný podprostor $\mathcal{Q}$ je vždy určen jedním pevně zvoleným bodem A_i v každém z nich a součtem všech zaměření. Např.

$$\mathcal{Q} = A_1 + (Z(\{A_1, \dots, A_k\}) + Z(\mathcal{Q}_1) + \dots + Z(\mathcal{Q}_s)).$$

Pokud jsou podprostory zadány implicitně, je možné je nejdříve převést na parametrický tvar. V konkrétních situacích bývají funkční i jiné postupy. Všimněme si, že obecně je skutečně nutné využít jednoho bodu z každého podprostoru. Např. dvě paralelní přímky v rovině vygenerují celou rovinu, ale sdílí totéž jednorozměrné zaměření.

Příklad

Nalezněte parametrické vyjádření roviny procházející body

$$A = [2, 1, 1], \quad B = [3, 4, 5], \quad C = [4, -2, 3].$$

Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$

Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.

Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$

Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.
Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.

Nalézt průnik podprostorů $\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_s$

Pokud jsou zadány v implicitním tvaru, stačí sjednotit všechny rovnice do jednoho systému (a případně vynechat lineárně závislé). Pokud je vzniklý systém neřešitelný, je průnik prázdný. V opačném případě získáme implicitní popis afinního podprostoru, který je hledaným průnikem.

Pokud máme dány parametrické tvary, můžeme také hledat přímo společné body jako řešení vhodných rovnic, podobně jako při hledání průniků vektorových podprostorů. Získáme tak přímo opět parametrický popis. Pokud je podprostorů více než dva, musíme průnik hledat postupně.

Máme-li jeden prostor zadaný parametricky a ostatní implicitně, stačí dosadit parametrizované souřadnice a řešit výsledný systém rovnic.

Příklad

Nalezněte průnik podprostorů Q_1, Q_2, je-li

$$\begin{aligned} Q_1 : &\quad [4,-5,1,-2] + t_1 \cdot (3,5,4,2) + t_2 \cdot (2,4,5,1) + t_3 \cdot (0,3,1,2) \\ Q_2 : &\quad [4,4,4,4] + s_1 \cdot (0,-6,-2,-4) + s_2 \cdot (-1,-5,-3,-3) \end{aligned}$$

Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření)

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami.

Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření)

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami.
Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvém případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod z q, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednoprvkový, dostáváme právě jedno řešení.

Nalezení příčky mimoběžek p, q v $\mathcal{A}_3$ procházející daným bodem nebo mající předem daný směr (tj. zaměření)

Příčkou rozumíme přímku, která má neprázdný průnik s oběma mimoběžkami.
Výsledná příčka r tedy bude jednorozměrným afinním podprostorem. Pokud máme zadán jeho bod $A \in r$, pak afinní podprostor generovaný p a A je buď přímka ($A \in p$) nebo rovina ($A \notin p$). V prvém případě máme nekonečně mnoho řešení, jedno pro každý bod z q, v druhém stačí najít průnik B roviny $\langle p \cup A \rangle$ s q a $r = \langle \{A, B\} \rangle$. Pokud je průnik prázdný, úloha nemá řešení, v případě že $q \subset \langle p \cup A \rangle$, máme opět nekonečně mnoho řešení, a pokud je průnik jednoprvkový, dostáváme právě jedno řešení.
Máme-li místo bodu dán směr $u \in \mathbb{R}^n$, tj. zaměření r, pak uvažujeme opět podprostor $\mathcal{Q}$ generovaný p a zaměřením $Z(p) + \langle u \rangle \subset \mathbb{R}^n$. Opět, pokud $q \subset \mathcal{Q}$, máme nekonečně mnoho řešení, jinak uvážíme průnik $\mathcal{Q}$ s q a úlohu dokončíme stejně jako v předchozím případě.