Matematika I – 10. přednáška
Základy analytické geometrie, vlastní hodnoty a vlastní vektory

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7. 5. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na `http://www.kolej.mff.cuni.cz/~lmotm275/skripta/`).

Plán přednášky

Euklidovská geometrie

Definice

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

Euklidovská geometrie

Definice

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bází $\underline{u}$.

Euklidovská geometrie

Definice

Standardní **bodový euklidovský prostor** $\mathcal{E}_n$ je afinní prostor $\mathcal{A}_n$, jehož zaměřením je standardní euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = x^T \cdot y.$$

Kartézská souřadná soustava je afinní souřadná soustava $(A_0; \underline{u})$ s ortonormální bází $\underline{u}$.
Vzdálenost bodů $A, B \in \mathcal{E}_n$ definujeme jako velikost vektoru $\|B - A\|$, budeme ji značit $\rho(A, B)$. **Euklidovské podprostory** v $\mathcal{E}_n$ jsou afinní podprostory, jejichž zaměření uvažujeme spolu se zúženými skalárními součiny.

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ (**Cauchyova nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*

Připomeňme několik tvrzení o prostorech se skalárním součinem:

Věta

Pro každé vektory u a v, které leží v reálném vektorovém prostoru V se skalárním součinem, platí

1. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (**trojúhelníková nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
2. $|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|$ (**Cauchyova nerovnost**). *Přitom rovnost nastane právě, když jsou u a v lineárně závislé.*
3. *pro každý ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ platí* $\|u\|^2 \geq |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$ (**Besselova nerovnost**).
4. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ je* $u \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ *právě když* $\|u\|^2 = |u \cdot e_1|^2 + \dots + |u \cdot e_k|^2$ (**Parsevalova rovnost**).
5. *Pro ortonormální systém vektorů $(e_1, \dots, e_k)$ a $u \in V$ je* $w = (u \cdot e_1)e_1 + \dots + (u \cdot e_k)e_k$ *jediným vektorem, který minimalizuje velikost* $\|u - v\|$ *pro všechny* $v \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$.

Odtud dostáváme jednoduché geometrické důsledky:

Věta

1. $\rho(A, B) = \rho(B, A)$
2. $\rho(A, B) = 0$ *právě, když* $A = B$
3. $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$
4. *V každé kartézské souřadné soustavě* $(A_0; \underline{e})$ *mají body* $A = A_0 + a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, \quad B = A_0 + b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$ *vzdálenost* $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}$.
5. *Je–li dán bod* A *a podprostor* $\mathcal{Q}$ *v* $\mathcal{E}_n$, *pak existuje bod* $P \in \mathcal{Q}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $\mathcal{Q}$ *od* A. *Vzdálenost bodů* A *a* P *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q})^{\perp}$ *pro libovolný* $B \in \mathcal{Q}$.
6. *Obecněji, pro podprostory* $\mathcal{Q}$ *a* $\mathcal{R}$ *v* $\mathcal{E}_n$ *existují body* $Q \in \mathcal{Q}$ *a* $R \in \mathcal{R}$ *minimalizující vzdálenosti bodů* $A \in \mathcal{Q}$ *a* $B \in \mathcal{R}$. *Vzdálenost bodů* Q *a* R *je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru* $A - B$ *do* $Z(\mathcal{Q} \cup \mathbb{R})^{\perp}$ *pro libovolné body* $A \in \mathcal{Q}$ *a* $R \in \mathcal{R}$.

Určení vzdálenosti podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$:

$$p:\ [1,-1,0]+t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q:\ [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Určení vzdálenosti podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$:

$$p: [1,-1,0] + t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1] + t(-1,-2,1).$$

Řešení

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk zjistíme například pomocí vektorového součinu: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^\perp = \langle(-1,2,3)\times(-1,-2,1)\rangle = \langle(8,-2,4)\rangle$.

Určení vzdálenosti podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$:

$$p: [1,-1,0] + t(-1,2,3), \quad \text{a} \quad q: [2,5,-1] + t(-1,-2,1).$$

Řešení

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk zjistíme například pomocí vektorového součinu: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp} = \langle(-1,2,3)\times(-1,-2,1)\rangle = \langle(8,-2,4)\rangle$. Spojnicí daných přímek je například úsečka $[1,-1,0][2,5,-1]$, promítneme tedy vektor $[1,-1,0]-[2,5,-1] = (-1,-6,1)$.

Určení vzdálenosti podprostorů

Příklad

Určete vzdálenost přímek v $\mathbb{R}^3$:

$$p:\ [1,-1,0]+t(-1,2,3),\quad \text{a} \quad q:\ [2,5,-1]+t(-1,-2,1).$$

Řešení

Vzdálenost je dána jako velikost kolmého průmětu libovolné příčky (spojnice) daných přímek do ortogonálního doplňku vektorového podprostoru generovaného jejich zaměřeními. Tento ortogonální doplněk zjistíme například pomocí vektorového součinu: $\langle(-1,2,3),(-1,-2,1)\rangle^{\perp}=\langle(-1,2,3)\times(-1,-2,1)\rangle=\langle(8,-2,4)\rangle$. Spojnicí daných přímek je například úsečka $[1,-1,0][2,5,-1]$, promítneme tedy vektor $[1,-1,0]-[2,5,-1]=(-1,-6,1)$. Pro vzdálenost přímek pak dostáváme: $\rho(p,q)=\frac{|(-1,-6,1)\cdot(4,-1,2)|}{\|(4,-1,2)\|}=\frac{4}{\sqrt{21}}$.

Příklad

Na přímce $p : x + 2y + z - 1 = 0, \quad 3x - y + 4z - 29 = 0$ nalezněte bod A, který má stejnou vzdálenost od bodů $B = [3, 11, 4]$ a $C = [-5, -13, -2]$.

Příklad

Na přímce $p : x + 2y + z - 1 = 0, \quad 3x - y + 4z - 29 = 0$ nalezněte bod A, který má stejnou vzdálenost od bodů $B = [3, 11, 4]$ a $C = [-5, -13, -2]$.

Řešení

Nejprve vyjádříme přímku p parametricky a poté

1. porovnáme porovnáme délky (parametrizovaných) vektorů $A - B, A - C$ nebo

Příklad

Na přímce $p: x + 2y + z - 1 = 0, \quad 3x - y + 4z - 29 = 0$ nalezněte bod A, který má stejnou vzdálenost od bodů $B = [3, 11, 4]$ a $C = [-5, -13, -2]$.

Řešení

Nejprve vyjádříme přímku p parametricky a poté

1. porovnáme porovnáme délky (parametrizovaných) vektorů $A - B, A - C$ nebo
2. pomocí normálového vektoru vyjádříme obecnou rovnici roviny, tvořené body se stejnou vzdáleností od bodů A a B a pak určíme její průsečík s přímkou p.

Odchylka podprostorů

Definice

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V.
Odchylka podprostorů U_1, U_2 je reálné číslo
$\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

1. Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak

$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\|u\| \|v\|}.$$

Odchylka podprostorů

Definice

Nechť U_1, U_2 jsou podprostory v euklidovském prostoru V. **Odchylka podprostorů** U_1, U_2 je reálné číslo $\alpha = \varphi(U_1, U_2) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ splňující:

1. Je-li $\dim U_1 = \dim U_2 = 1$, $U_1 = \langle u \rangle$, $U_2 = \langle v \rangle$, pak
$$\cos \alpha = \frac{|u.v|}{\|u\|\|v\|}.$$
2. Jsou-li dimenze U_1, U_2 kladné a $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, pak je odchylka minimem všech odchylek jednorozměrných podprostorů
$$\alpha = \min\{\varphi(\langle u \rangle, \langle v \rangle); 0 \neq u \in U_1, 0 \neq v \in U_2\}.$$

Definice (pokr.)

3. Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména, je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definice (pokr.)

3. Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména, je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.
4. Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definice (pokr.)

3. Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména, je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.
4. Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Definice (pokr.)

3 Je-li $U_1 \subset U_2$ nebo $U_2 \subset U_1$ (zejména, je-li jeden z nich nulový), je $\alpha = 0$.

4 Je-li $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ a $U_1 \neq U_1 \cap U_2 \neq U_2$, pak

$$\alpha = \varphi(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}, U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}).$$

Odchylka podprostorů $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ v bodovém euklidovském prostoru $\mathcal{E}_n$ se definuje jako odchylka jejich zaměření $Z(\mathcal{Q}_1)$, $Z(\mathcal{Q}_2)$.

Všimněme si, že odchylka je vždy dobře definována, zejména v posledním případě je

$$(U_1 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}) \cap (U_2 \cap (U_1 \cap U_2)^{\perp}) = \{0\}$$

můžeme tedy opravdu odchylku určit podle bodu (2).

Plán přednášky

1. Analytická geometrie
   - Euklidovská geometrie
   - Základní úlohy euklidovské geometrie
2. Vlastní hodnoty (čísla) a vlastní vektory
3. Vlastnosti vlastních hodnot a vektorů
   - Mocniny diagonalizovatelných matic

Je-li A čtvercová matice řádu n, pak uvažujme lineární zobrazení $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je dáno maticí A. V tomto lineárním zobrazení nás zajímají *směry*, které toto zobrazení *preferuje* (zachovává), tj. zajímá nás, které vektory $u \in \mathbb{R}^n$ se zobrazí na svůj násobek. Číslo vyjadřující tento násobek pak můžeme chápat jako *přirozenou frekvenci* zobrazení L_A a příslušný vektor (nebo vektory) jako *přirozené směry* zobrazení L_A.

Je-li A čtvercová matice řádu n, pak uvažujme lineární zobrazení $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které je dáno maticí A. V tomto lineárním zobrazení nás zajímají *směry*, které toto zobrazení *preferuje* (zachovává), tj. zajímá nás, které vektory $u \in \mathbb{R}^n$ se zobrazí na svůj násobek. Číslo vyjadřující tento násobek pak můžeme chápat jako *přirozenou frekvenci* zobrazení L_A a příslušný vektor (nebo vektory) jako *přirozené směry* zobrazení L_A.

V celé této přednášce budeme uvažovat pouze **čtvercové** matice řádu n. Navíc, i když budeme nuceni občas pracovat s komplexními čísly, prvky matice A budou vždy **reálné**.
Viz např. `http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors`.

Vlastní hodnoty (čísla) a vlastní vektory

Definice

Vlastní hodnota (též **vlastní číslo**) matice A je číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje (alespoň jeden) **nenulový** vektor $u \in \mathbb{C}^n$ s vlastností

$$A \cdot u = \lambda \cdot u.$$

Vektor u se pak nazývá **vlastní vektor** (eigenvector) matice A příslušející vlastní hodnotě (eigenvalue) λ.
Množina všech vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ (společně s nulovým vektorem) se nazývá **vlastní prostor** příslušející vlastní hodnotě λ a značíme ji $\mathrm{Eigen}(\lambda)$ (z angl./něm. *eigenspace*).

Vlastní hodnoty (čísla) a vlastní vektory

Definice

Vlastní hodnota (též **vlastní číslo**) matice A je číslo $\lambda \in \mathbb{C}$, pro které existuje (alespoň jeden) **nenulový** vektor $u \in \mathbb{C}^n$ s vlastností

$$A \cdot u = \lambda \cdot u.$$

Vektor u se pak nazývá **vlastní vektor** (eigenvector) matice A příslušející vlastní hodnotě (eigenvalue) λ.
Množina všech vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ (společně s nulovým vektorem) se nazývá **vlastní prostor** příslušející vlastní hodnotě λ a značíme ji $\mathrm{Eigen}(\lambda)$ (z angl./něm. *eigenspace*).

Nulový vektor $u = 0$ vždy vyhovuje rovnici $A \cdot u = \lambda \cdot u$, a proto je v Definici požadavek na existenci nenulového vlastního vektoru.

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} A \cdot u &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot u, \\ A \cdot v &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot v. \end{aligned}$$

Jsou tedy $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = 2$ vlastní hodnoty matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory u (pro $\lambda_1 = -1$) a v (pro $\lambda_2 = 2$).

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 + 3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - 3i \end{pmatrix}.$$

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} A \cdot u &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} = (-2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \\ A \cdot v &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} = (-2-3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Příklad

Uvažujme matici A a vektory u a v, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$\begin{aligned} A \cdot u &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} = (-2+3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix}, \\ A \cdot v &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} = (-2-3i) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jsou tedy $\lambda_1 = -2+3i$ a $\lambda_2 = -2-3i$ vlastní hodnoty matice A a jejich příslušné vlastní vektory jsou právě vektory u (pro $\lambda_1 = -2+3i$) a v (pro $\lambda_2 = -2-3i$).

Poznámka

Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Poznámka

Je-li u vlastní vektor matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také libovolný jeho (nenulový) násobek vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A\,(a\,u) = a\,(Au) = a\,(\lambda\,u) = \lambda\,(a\,u).$$

Podobně, jsou-li u, v vlastní vektory matice A příslušející vlastní hodnotě λ, potom je také jejich součet vlastní vektor příslušející téže vlastní hodnotě, protože

$$A(u+v) = (Au) + (Av) = (\lambda\,u) + (\lambda\,v) = \lambda\,(u+v).$$

Vlastní vektory příslušející téže vlastní hodnotě tedy tvoří (společně s nulovým vektorem) **podprostor** vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$. To také zdůvodňuje terminologii *vlastní prostor*.

Příklad

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ z 1. příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-1) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathrm{Eigen}(2) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle.$$

Příklad

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ z 1. příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-1) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathrm{Eigen}(2) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) Pro matici $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}$ z 2. příkladu je

$$\mathrm{Eigen}(-2+3i) = \langle u \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1+3i \end{pmatrix} \rangle,$$
$$\mathrm{Eigen}(-2-3i) = \langle v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1-3i \end{pmatrix} \rangle.$$

Tvrzení

Je-li λ reálná vlastní hodnota matice A, potom jsou všechny příslušné vlastní vektory taktéž reálné.

Tvrzení

Je-li λ reálná vlastní hodnota matice A, potom jsou všechny příslušné vlastní vektory taktéž reálné.

Důkaz.

Protože je $\lambda \in \mathbb{R}$, má matice $A - \lambda E$ taktéž pouze reálné prvky. Tedy má homogenní systém $(A - \lambda E) \cdot u = 0$ reálná řešení, tj. vlastní vektory u jsou reálné. $\square$

Z definičního vztahu plyne, že vlastní vektory jsou **nenulová** řešení homogenního systému

$$(A - \lambda E) \cdot u = A \cdot u - \lambda \cdot u = 0.$$

Z předchozího víme, že má-li mít taková soustava nenulové řešení, musí být matice

$$A - \lambda E$$

singulární, tj.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Matici $A - \lambda E$ dostaneme tedy tak, že v matici A odečteme od každého diagonálního prvku proměnnou λ (či číslo λ, pokud ho již jako vlastní hodnotu známe).

Příklad

Pro matici A z 1. příkladu máme

$$|A - \lambda E| = \left| \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)(4-\lambda) - (-10) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2).$$

Příklad

Pro matici A z 1. příkladu máme

$$|A-\lambda E| = \left|\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-3-\lambda)(4-\lambda) - (-10) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Pro matici A z 2. příkladu pak dostáváme

$$|A-\lambda E| = \left|\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -10 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(-3-\lambda) - (-10) = \lambda^2 + 4\lambda + 13.$$

V předchozích příkladech je vidět, že výraz $|A - \lambda E|$ je **polynom** v proměnné λ. Pro matici řádu n má tento polynom stupeň právě n. Výraz

$$p(\lambda) := |A - \lambda E|$$

se proto nazývá **charakteristický polynom** matice A a rovnice

$$p(\lambda) = |A - \lambda E| = 0$$

se nazývá **charakteristická rovnice** matice A. A protože má každý polynom stupně n právě n kořenů (počítáno včetně násobností), platí tedy následující tvrzení.

Věta

Vlastní hodnoty matice A jsou právě kořeny charakteristického polynomu.

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2,$$

a proto je $\lambda_1 = 2$ (násobnosti 2) jediná vlastní hodnota této matice.
Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Řešení (pokr.)

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2\,E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Volbou volné proměnné $x_1 = t$ dostaneme řešení $(t, 0) = t \cdot (1, 0)$, tj. vlastní vektor a příslušný vlastní prostor jsou

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Eigen}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Řešení (pokr.)

Vlastní prostor pro $\lambda_1 = 2$:

$$(A - \lambda_1 E \,|\, 0) = (A - 2E \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Volbou volné proměnné $x_1 = t$ dostaneme řešení $(t, 0) = t \cdot (1, 0)$, tj. vlastní vektor a příslušný vlastní prostor jsou

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Eigen}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Definice

Algebraická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu.
Geometrická násobnost vlastní hodnoty λ je definována jako dimenze příslušného vlastního prostoru $\mathrm{Eigen}(\lambda)$.

Lze ukázat, že geometrická násobnost je vždy nejvýše rovna algebraické násobnosti, protože počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ nemůže převýšit násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu. Např. v předchozím příkladu je geometrická násobnost vlastní hodnoty $\lambda = 2$ rovna $\dim \mathrm{Eigen}(2) = 1$, zatímco algebraická násobnost této vlastní hodnoty je 2. (V dalším uvidíme, že tyto dvě násobnosti jsou stejné právě když je matice A tzv. *diagonalizovatelná*.)

Lze ukázat, že geometrická násobnost je vždy nejvýše rovna algebraické násobnosti, protože počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušejících téže vlastní hodnotě λ nemůže převýšit násobnost čísla λ jakožto kořene charakteristického polynomu. Např. v předchozím příkladu je geometrická násobnost vlastní hodnoty $\lambda = 2$ rovna $\dim \mathrm{Eigen}(2) = 1$, zatímco algebraická násobnost této vlastní hodnoty je 2. (V dalším uvidíme, že tyto dvě násobnosti jsou stejné právě když je matice A tzv. *diagonalizovatelná*.)

Na druhou stranu, má-li vlastní hodnota λ **(algebraickou) násobnost** 1 (tj. jedná se o jednoduchý kořen charakteristického polynomu), potom k ní přísluší (alespoň jeden) vlastní vektor $u \neq 0$. Je tedy geometrická násobnost této vlastní hodnoty alespoň 1. Ale protože, jak jsme výše uvedli, nemůže být geometrická násobnost větší než algebraická násobnost, plyne odsud, že v **tomto případě** jsou tyto dvě násobnosti **stejné** (obě jsou rovny 1).

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici

$$p(\lambda) = |A - \lambda E| = 0.$$

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici
$$p(\lambda) = |A - \lambda E| = 0.$$
2. **Pro každou** vlastní hodnotu λ najdeme (bázi prostoru) řešení homogenního systému
$$(A - \lambda E) \cdot u = 0.$$
Z definice vlastní hodnoty musí tento systém mít netriviální řešení.

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici
$$p(\lambda) = |A - \lambda E| = 0.$$
2. **Pro každou** vlastní hodnotu λ najdeme (bázi prostoru) řešení homogenního systému
$$(A - \lambda E) \cdot u = 0.$$
Z definice vlastní hodnoty musí tento systém mít netriviální řešení.

Postup pro nalezení vlastních hodnot a vlastních vektorů matice A je tedy následující:

1. Najdeme kořeny charakteristického polynomu, tj. vyřešíme charakteristickou rovnici
$$p(\lambda) = |A - \lambda E| = 0.$$
2. **Pro každou** vlastní hodnotu λ najdeme (bázi prostoru) řešení homogenního systému
$$(A - \lambda E) \cdot u = 0.$$
Z definice vlastní hodnoty musí tento systém mít netriviální řešení.

Příklad

Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Struktura charakteristického polynomu

Protože je $p(\lambda) := |A - \lambda\, E|$ **polynom** stupně n, je tvaru

$$p(\lambda) = c_n\,\lambda^n + c_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\,\lambda + c_0.$$

Příklad

Pro matice řádu $n = 2$ je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + ad - bc,$$

tj. $c_2 = 1$, $c_1 = -(a+d)$, $c_0 = ad - bc$.

Struktura charakteristického polynomu

Protože je $p(\lambda) := |A - \lambda\, E|$ **polynom** stupně n, je tvaru

$$p(\lambda) = c_n\, \lambda^n + c_{n-1}\, \lambda^{n-1} + \cdots + c_1\, \lambda + c_0.$$

Příklad

Pro matice řádu $n = 2$ je $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc =$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + ad - bc,$$

tj. $c_2 = 1$, $c_1 = -(a+d)$, $c_0 = ad - bc$.

Odtud vidíme, že absolutní člen tohoto polynomu, tj. koeficient c_0, je $c_0 = p(0) = |A - 0\,.\,E| = |A|$.

Dále, koeficient c_n u nejvyšší mocniny dostaneme tak, že vynásobíme všechny koeficienty u proměnné λ, protože součin diagonálních prvků matice $A - \lambda E$ je zcela určitě jeden ze sčítanců v rozvoji determinantu $|A - \lambda E|$, tj.

$$c_n = (-1)^n.$$

Dále, koeficient c_n u nejvyšší mocniny dostaneme tak, že vynásobíme všechny koeficienty u proměnné λ, protože součin diagonálních prvků matice $A - \lambda\, E$ je zcela určitě jeden ze sčítanců v rozvoji determinantu $|A - \lambda\, E|$, tj.

$$c_n = (-1)^n.$$

Každý polynom stupně n lze jednoznačně napsat jako součin kořenových činitelů, přičemž jednotlivé kořenové činitele odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$, tj. vlastním hodnotám matice A. Tzn. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost – tedy celkem je n kořenů pro polynom $p(\lambda)$ stupně n), potom je

$$p(\lambda) = (-1)^n\,(\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,\dots\,(\lambda - \lambda_n).$$

Dále, koeficient c_n u nejvyšší mocniny dostaneme tak, že vynásobíme všechny koeficienty u proměnné λ, protože součin diagonálních prvků matice $A - \lambda\, E$ je zcela určitě jeden ze sčítanců v rozvoji determinantu $|A - \lambda\, E|$, tj.

$$c_n = (-1)^n.$$

Každý polynom stupně n lze jednoznačně napsat jako součin kořenových činitelů, přičemž jednotlivé kořenové činitele odpovídají kořenům polynomu $p(\lambda)$, tj. vlastním hodnotám matice A. Tzn. Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost – tedy celkem je n kořenů pro polynom $p(\lambda)$ stupně n), potom je

$$p(\lambda) = (-1)^n\, (\lambda - \lambda_1)\, (\lambda - \lambda_2)\, \ldots\, (\lambda - \lambda_n).$$

Opětovnou volbou $\lambda = 0$ dostaneme

$$p(0) = (-1)^n\, (-1)^n\, \lambda_1\, \lambda_2\, \ldots\, \lambda_n = \lambda_1\, \lambda_2\, \ldots\, \lambda_n.$$

Porovnáním s předchozím jsme odvodili následující důležitý fakt.

Věta

Determinant matice A je roven součinu všech jejích vlastních hodnot. Tedy jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost), potom je

$$|A| = \lambda_1 \, \lambda_2 \, \dots \, \lambda_n.$$

Věta

Determinant matice A je roven součinu všech jejích vlastních hodnot. Tedy jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost), potom je

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Analogicky se odvodí:

Věta

Stopa matice A je rovna součtu všech jejích vlastních hodnot. Tedy jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty matice A (a každá vlastní hodnota se zde vyskytuje tolikrát, jaká je její algebraická násobnost), potom je

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

Příklad

V 1. příkladu je

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 = (-1)\,.\,2 = -2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{a}$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = (-1) + 2 = 1 = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Příklad

V 1. příkladu je

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 = (-1) \, . \, 2 = -2 = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{a}$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = (-1) + 2 = 1 = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

V 2. příkladu je

$$|A| = \lambda_1 \lambda_2 = (-2+3i) \, . \, (-2-3i) = 4+9 = 13 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{a}$$

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 = (-2+3i) + (-2-3i) = -4 = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Plán přednášky

Lineární nezávislost vlastních vektorů

Jednou z nejdůležitějších vlastností vlastních vektorů je to, že vlastní vektory příslušející **různým** vlastním hodnotám jsou **lineárně nezávislé**.

Věta

Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *navzájem různé vlastní hodnoty matice* A *a* $u_1, \ldots, u_k$ *jejich příslušné vlastní vektory, potom jsou vektory* $u_1, \ldots, u_k$ *lineárně nezávislé.*

Důkaz.

Indukcí vzhledem k počtu vektorů. Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí, protože jeden vlastní vektor u_1 tvoří sám o sobě lineárně nezávislou množinu.

Důkaz.

Indukcí vzhledem k počtu vektorů. Pro $k = 1$ tvrzení zřejmě platí, protože jeden vlastní vektor u_1 tvoří sám o sobě lineárně nezávislou množinu.
Předpokládejme, že tvrzení platí pro libovolnou množinu $k - 1$ vlastních vektorů příslušejících různým vlastním hodnotám.
Lineární závislost či nezávislost vektorů $u_1, \dots, u_k$ určíme z jejich nulové lineární kombinace, tj.

$$a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_k\, u_k = 0.$$

Předně si uvědomme, že pro $i = 1, \dots, k$ je

$$(A - \lambda_1\, E)\, u_i = Au_i - \lambda_1\, u_i = \lambda_i\, u_i - \lambda_1\, u_i = (\lambda_i - \lambda_1)\, u_i,$$

zejména pro $i = 1$ je pak $(A - \lambda_1\, E)\, u_1 = 0$. Předchozí rovnost vynásobíme zleva maticí $A - \lambda_1\, E$ a dostaneme □

Pokr. důkazu.

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_1 E)\,(a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_k\, u_k) \\ &= a_1\, \underbrace{(A - \lambda_1 E)\, u_1}_{=0} + a_2\, (A - \lambda_1 E)\, u_2 + \cdots + a_k\, (A - \lambda_1 E)\, u_k \\ &= a_2\, (\lambda_2 - \lambda_1)\, u_2 + \cdots + a_k\, (\lambda_k - \lambda_1)\, u_k. \end{aligned}$$

Dostali jsme tedy nulovou lineární kombinaci vlastních vektorů $u_2, \ldots, u_k$, kterých je $k - 1$. Podle indukčního předpokladu je tato množina $k - 1$ vektorů lineárně nezávislá, a tedy musí platit

$$a_2\, (\lambda_2 - \lambda_1) = a_3\, (\lambda_3 - \lambda_1) = \cdots = a_k\, (\lambda_k - \lambda_1) = 0.$$

Ale protože jsou vlastní hodnoty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ navzájem různé, plyne z předchozího, že $a_2 = a_3 = \cdots = a_k = 0$.
Odtud dále plyne, že $a_1\, u_1 = 0$. A protože je $u_1 \neq 0$, je také koeficient $a_1 = 0$. $\square$

Příklad

Ukázali jsme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dostáváme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné $\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle.$

Příklad

Ukázali jsme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dostáváme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné $\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$. Vlastní vektor $(1,1,1)^T$ (či jeho libovolný nenulový násobek) je lineárně nezávislý s každým z vektorů $(-1,0,1)^T, (3,1,0)^T$ (či jejich libovolnou nenulovou lineární kombinací). Samozřejmě platí, že poslední 2 vektory jsou lineárně nezávislé, je tedy lineárně nezávislá celá trojice těchto vektorů.

Příklad

Ukázali jsme, že pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

dostáváme vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné $\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$. Vlastní vektor $(1,1,1)^T$ (či jeho libovolný nenulový násobek) je lineárně nezávislý s každým z vektorů $(-1,0,1)^T, (3,1,0)^T$ (či jejich libovolnou nenulovou lineární kombinací). Samozřejmě platí, že poslední 2 vektory jsou lineárně nezávislé, je tedy lineárně nezávislá celá trojice těchto vektorů.

Důsledek

Má-li matice A n navzájem různých vlastních hodnot, potom je množina příslušných vlastních vektorů (o n prvcích) lineárně nezávislá a tedy tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^n$.

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní hodnota matice A a $u \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor, potom splňují vztah

$$\lambda = \frac{\langle Au, u \rangle}{\langle u, u \rangle} = \frac{u^T A u}{\|u\|_2^2}.$$

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní hodnota matice A a $u \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor, potom splňují vztah

$$\lambda = \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{u^T Au}{\|u\|_2^2}.$$

Důkaz.

Snadno vynásobením rovnice $Au = \lambda u$ zleva vektorem u^T. $\square$

Tvrzení

Je-li $\lambda \in \mathbb{C}$ vlastní hodnota matice A a $u \in \mathbb{C}^n$ příslušný vlastní vektor, potom splňují vztah

$$\lambda = \frac{\langle Au, u\rangle}{\langle u, u\rangle} = \frac{u^T Au}{\|u\|_2^2}.$$

Důkaz.

Snadno vynásobením rovnice $Au = \lambda\, u$ zleva vektorem u^T. $\square$

Příklad

Pro matici z předchozího příkladu máme

$$\lambda_1 = 0, \quad u_1 = (1, 1, 1)^T, \quad \frac{u_1^T Au_1}{\|u_1\|_2^2} = \frac{0}{3} = 0 = \lambda_1,$$

$$\lambda_2 = 1, \quad u_2 = (-1, 0, 1)^T, \quad \frac{u_2^T Au_2}{\|u_2\|_2^2} = \frac{2}{2} = 1 = \lambda_2.$$

Tvrzení

Je-li A (horní nebo dolní) trojúhelníková matice, potom jsou její vlastní hodnoty rovny prvkům na hlavní diagonále. Zejména toto pravidlo platí pro matice diagonální.

Tvrzení

Je-li A (horní nebo dolní) trojúhelníková matice, potom jsou její vlastní hodnoty rovny prvkům na hlavní diagonále. Zejména toto pravidlo platí pro matice diagonální.

Poznámka

Z vlastností kořenů polynomu vyplývá, že pokud má matice A pouze **reálné** prvky, tak potom pokud má komplexní vlastní hodnotu $\lambda = \alpha + \beta i$, tak potom je vlastní hodnota i číslo komplexně sdružené $\overline{\lambda} = \alpha - \beta i$, tj. komplexní vlastní hodnoty se vyskytují jako komplexně sdružené páry. Přitom vlastní vektory příslušné komplexně sdruženým vlastním hodnotám jsou také navzájem komplexně sdružené.

Pomocí vlastních hodnot lze jednoduše charakterizovat regulární a singulární matice.

Tvrzení

(i) *Matice A je singulární* $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ *je vlastní hodnota matice A.*

(ii) *Matice A je regulární* $\Leftrightarrow$ *všechny vlastní hodnoty matice A jsou různé od nuly.*

Pomocí vlastních hodnot lze jednoduše charakterizovat regulární a singulární matice.

Tvrzení

(i) *Matice A je singulární* $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ *je vlastní hodnota matice A.*

(ii) *Matice A je regulární* $\Leftrightarrow$ *všechny vlastní hodnoty matice A jsou různé od nuly.*

Důkaz.

(i) Je-li matice A singulární, potom má homogenní systém $Au = 0$ netriviální řešení u. Tedy pro tento vektor u platí $Au = 0 \,.\, u$, neboli u je vlastní vektor příslušející vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Naopak, je-li $\lambda = 0$ vlastní hodnota matice A, potom pro příslušný vlastní vektor u $(\neq 0)$ platí vztah $Au = 0 \,.\, u = 0$, tedy matice A je singulární.
(ii) Tato část plyne z části (i), protože $\lambda = 0$ nemůže být vlastní hodnota regulární matice A.

Pomocí vlastních hodnot lze jednoduše charakterizovat regulární a singulární matice.

Tvrzení

(i) *Matice A je singulární* $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ *je vlastní hodnota matice A.*

(ii) *Matice A je regulární* $\Leftrightarrow$ *všechny vlastní hodnoty matice A jsou různé od nuly.*

Důkaz.

(i) Je-li matice A singulární, potom má homogenní systém $Au = 0$ netriviální řešení u. Tedy pro tento vektor u platí $Au = 0 \,.\, u$, neboli u je vlastní vektor příslušející vlastní hodnotě $\lambda = 0$. Naopak, je-li $\lambda = 0$ vlastní hodnota matice A, potom pro příslušný vlastní vektor u $(\neq 0)$ platí vztah $Au = 0 \,.\, u = 0$, tedy matice A je singulární.
(ii) Tato část plyne z části (i), protože $\lambda = 0$ nemůže být vlastní hodnota regulární matice A.
Alternativně plyne důkaz obou částí plyne z tvrzení o výpočtu $|A|$ pomocí vlastních hodnot.

□

Tvrzení

Nechť A je regulární matice. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice A $\Leftrightarrow$ číslo $\frac{1}{\lambda}$ je vlastní hodnota matice A^{-1}.

Tvrzení

Nechť A je regulární matice. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice $A \iff$ číslo $\frac{1}{\lambda}$ je vlastní hodnota matice A^{-1}.

Důkaz.

Toto tvrzení plyne přímo ze vztahu

$$0 = \underbrace{|A - \lambda E|}_{p_A(\lambda)} = |A(E - \lambda A^{-1})| = \left|\lambda A\left(\frac{1}{\lambda} E - A^{-1}\right)\right| =$$

$$= \lambda^n \,.\, |A| \,.\, \left|\frac{1}{\lambda} E - A^{-1}\right| = \underbrace{\lambda^n}_{\neq 0} \,.\, \underbrace{|A|}_{\neq 0} \,.\, (-1)^n \,.\, \underbrace{\left|A^{-1} - \frac{1}{\lambda} E\right|}_{p_{A^{-1}}(\frac{1}{\lambda})},$$

kde jsme použili Cauchyovu větu o determinantu součinu. Tedy číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastní hodnota matice $A \iff$ číslo $\frac{1}{\lambda}$ je vlastní hodnota matice A^{-1}.

□

V části o reprezentaci lineární transformace pomocí matice jsme se zabývali podobnými maticemi, tj. $A \sim B$ pokud $B = T^{-1} A\, T$ pro nějakou regulární matici T.

Tvrzení

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

V části o reprezentaci lineární transformace pomocí matice jsme se zabývali podobnými maticemi, tj. $A \sim B$ pokud $B = T^{-1} A T$ pro nějakou regulární matici T.

Tvrzení

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Důkaz.

Je-li $B = T^{-1} A T$, potom je charakteristický polynom matice B roven

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= |B - \lambda E| = |T^{-1} A T - \lambda E| = \left|T^{-1} (A - \lambda T E T^{-1}) T\right| \\ &= |T^{-1}| \,.\, |A - \lambda E| \,.\, |T| = |A - \lambda E| = p_A(\lambda), \end{aligned}$$

tj. charakteristické polynomy matic A a B jsou totožné. □

V části o reprezentaci lineární transformace pomocí matice jsme se zabývali podobnými maticemi, tj. $A \sim B$ pokud $B = T^{-1} A\, T$ pro nějakou regulární matici T.

Tvrzení

Podobné matice mají stejný charakteristický polynom.

Důkaz.

Je-li $B = T^{-1} A\, T$, potom je charakteristický polynom matice B roven

$$
\begin{aligned}
p_B(\lambda) &= |B - \lambda\, E| = |T^{-1} A\, T - \lambda\, E| = \left|T^{-1} (A - \lambda\, T\, E\, T^{-1})\, T\right| \\
&= |T^{-1}|\,.\,|A - \lambda\, E|\,.\,|T| = |A - \lambda\, E| = p_A(\lambda),
\end{aligned}
$$

tj. charakteristické polynomy matic A a B jsou totožné. □

Důsledek

Podobné matice mají stejné vlastní hodnoty a tedy i stejný determinant a stejnou stopu (součet prvků na hlavní diagonále).

Předchozí důsledek říká, že vlastní hodnoty a vlastní vektory (tj. *preferované násobky* a *preferované směry*) lineární transformace nezávisejí na volbě báze, v níž tuto lineární transformaci reprezentujeme pomocí matice.

Předchozí důsledek říká, že vlastní hodnoty a vlastní vektory (tj. *preferované násobky* a *preferované směry*) lineární transformace nezávisejí na volbě báze, v níž tuto lineární transformaci reprezentujeme pomocí matice.
Jelikož je charakteristický polynom založen na výpočtu determinantu a determinant lze spočítat rozvojem podle libovolného **řádku** nebo **sloupce** (Laplaceova věta o rozvoji), mají matice A a A^T stejný charakteristický polynom a tedy i stejné vlastní hodnoty.

Tvrzení

Matice A a matice A^T mají stejný charakteristický polynom a tedy i stejné vlastní hodnoty.

Báze z vlastních vektorů

Před časem jsme viděli, že někdy je možné zvolit bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ z vlastních vektorů matice A.

Báze z vlastních vektorů

Před časem jsme viděli, že někdy je možné zvolit bázi prostoru $\mathbb{R}^n$ z vlastních vektorů matice A.

Uvažujeme lineární transformaci $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zadanou maticí A, tj. $L(u) = A \cdot u$ (tedy $L = L_A$). Je zřejmé, že maticová reprezentace takové lineární transformace **záleží na volbě báze u** prostoru $\mathbb{R}^n$. Pokud ale zvolíme bázi **u** *šikovně*, může být maticová reprezentace transformace L velmi jednoduchá.

Tvrzení

Má-li matice A n lineárně nezávislých vlastních vektorů $u_1, \dots, u_n$ a označíme-li jako $\mathbf{u} := (u_1, \dots, u_n)$ *příslušnou bázi, potom má lineární zobrazení L_A v této bázi* **diagonální** *maticovou reprezentaci. Navíc, na hlavní diagonále jsou právě vlastní hodnoty příslušné (postupně) vlastním vektorům $u_1, \dots, u_n$.*

Diagonalizovatelné matice

Je-li A čtvercová matice řádu n, potom nás zajímá,

Kolik lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A vlastně má?

Diagonalizovatelné matice

Je-li A čtvercová matice řádu n, potom nás zajímá,

Kolik lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A vlastně má?

Pokud má matice A **plný počet (tj. n)** lineárně nezávislých vlastních vektorů, potom lze tuto matici *diagonalizovat*. Označme jako $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní hodnoty (nemusí být nutně všechny navzájem různé) a jako $u_1, \dots, u_n$ příslušné lineárně nezávislé vlastní vektory (jako **sloupcové vektory!**), a položme

$$P := \begin{pmatrix} | & & | \\ u_1 & \dots & u_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Matice P se nazývá **matice vlastních vektorů** a matice D se nazývá **matice vlastních hodnot**.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P takové, že platí

$$A = PDP^{-1}, \qquad \text{neboli} \qquad D = P^{-1}AP.$$

Proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P se nazývá **diagonalizace** matice A

Důsledek

Každá matice A, která má n navzájem různých vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá **diagonalizovatelná**, jestliže je podobná diagonální matici, tj. jestliže existuje diagonální matice D a regulární matice P takové, že platí

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{neboli} \quad D = P^{-1}AP.$$

Proces nalezení diagonální matice D a regulární matice P se nazývá **diagonalizace** matice A

Důsledek

Každá matice A, která má n navzájem různých vlastních hodnot, je diagonalizovatelná.

Poznámka

Snadno se ukáže i platnost opačného tvrzení, tj. *každá diagonalizovatelná matice má n lineárně nezávislých vlastních vektorů* (což ale neznamená, že musí mít n různých vlastních hodnot).

Příklad

Podle předchozího tvrzení není matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalizovatelná, protože má (jak jsme ukázali minule) pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Odtud plyne:

Algoritmus pro nalezení maximálního počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice

1. Najdeme všechny **navzájem různé** vlastní hodnoty matice A, označme je jako $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Odtud plyne:

Algoritmus pro nalezení maximálního počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice

1. Najdeme všechny **navzájem různé** vlastní hodnoty matice A, označme je jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2. Pro každý index $i = 1, \ldots, k$ (tj. pro každou vlastní hodnotu λ_i), najdeme bázi příslušného podprostoru vlastních vektorů.

Důsledek

Čtvercová matice A řádu n je diagonalizovatelná $\Leftrightarrow$ pro každou vlastní hodnotu λ_i matice A je její geometrická násobnost rovna násobnosti algebraické.

Odtud plyne:

Algoritmus pro nalezení maximálního počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice

1. Najdeme všechny **navzájem různé** vlastní hodnoty matice A, označme je jako $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.
2. Pro každý index $i = 1, \ldots, k$ (tj. pro každou vlastní hodnotu λ_i), najdeme bázi příslušného podprostoru vlastních vektorů.
3. Sjednocení všech vektorů z takto nalezených bází je **maximální** množina lineárně nezávislých vlastních vektorů matice A. Má-li tato množina n prvků, potom je matice A diagonalizovatelná. Má-li tato množina méně než n prvků, potom matice A diagonalizovatelná není.

Mocniny diagonalizovatelných matic

Vzorec

$$A = PDP^{-1}$$

lze dobře využít k výpočtu mocnin diagonalizovatelných matic. Např. pro druhou mocninu matice A platí

$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

přičemž druhá mocnina diagonální matice je opět diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou druhými mocninami původních prvků, tj.

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Mocniny diagonalizovatelných matic

Vzorec

$$A = PDP^{-1}$$

lze dobře využít k výpočtu mocnin diagonalizovatelných matic. Např. pro druhou mocninu matice A platí

$$A^2 = A \cdot A = (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

přičemž druhá mocnina diagonální matice je opět diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou druhými mocninami původních prvků, tj.

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}.$$

Podobně se ukáže pomocí matematické indukce (a pro záporná k pomocí tvrzení o vlastních hodnotách inverzní matice) , že

$$A^k = PD^kP^{-1}, \qquad \text{kde} \qquad D^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Příklad

Určete A^k, kde $k \in \mathbb{Z}$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Příklad

Určete A^k, kde $k \in \mathbb{Z}$ pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení

Ukázali jsme, že A má vlastní hodnoty $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ a jim příslušné
$\mathrm{Eigen}(0) = \langle (1,1,1)^T \rangle, \mathrm{Eigen}(1) = \langle (-1,0,1)^T, (3,1,0)^T \rangle$.
Vlastní vektor $(1,1,1)^T$ (či jeho libovolný nenulový násobek) je lineárně nezávislý s každým z vektorů $(-1,0,1)^T, (3,1,0)^T$ (či jejich libovolnou nenulovou lineární kombinací). Samozřejmě platí, že poslední 2 vektory jsou lineárně nezávislé, je tedy lineárně nezávislá celá trojice těchto vektorů.

Řešení (pokr.)

Odtud $A = PDP^{-1}$, kde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A má vlastní hodnotu 0, není proto regulární a A^k není pro $k < 0$ definováno.

Řešení (pokr.)

Odtud $A = PDP^{-1}$, kde

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice A má vlastní hodnotu 0, není proto regulární a A^k není pro $k < 0$ definováno.

Pro $k > 0$ pak jde o tzv. *idempotentní matici* (splňující $A^2 = A$), neboť

$$A^k = PD^kP^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 1^k \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = A,$$

Caley-Hamiltonova věta

Poslední důležitý vztah, který lze bezprostředně vyvodit z mocniny diagonalizovatelné matice, je tzv. Cayley-Hamiltonova věta, která říká, že **každá** (tzn. nejen diagonalizovatelná) matice *A je kořenem* svého charakterictického polynomu.

Caley-Hamiltonova věta

Poslední důležitý vztah, který lze bezprostředně vyvodit z mocniny diagonalizovatelné matice, je tzv. Cayley-Hamiltonova věta, která říká, že **každá** (tzn. nejen diagonalizovatelná) matice A *je kořenem* svého charakterictického polynomu.

Věta

Je-li A čtvercová matice řádu n a

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$$

její charakteristický polynom, potom platí identita

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E_n = 0.$$

Caley-Hamiltonova věta

Poslední důležitý vztah, který lze bezprostředně vyvodit z mocniny diagonalizovatelné matice, je tzv. Cayley-Hamiltonova věta, která říká, že **každá** (tzn. nejen diagonalizovatelná) matice *A je kořenem* svého charakterictického polynomu.

Věta

Je-li A čtvercová matice řádu n a

$$p(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + c_1 \lambda + c_0$$

její charakteristický polynom, potom platí identita

$$p(A) = (-1)^n A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 E_n = 0.$$

Důkaz.

Pro diagonalizovatelné matice je důkaz je přímým důsledkem předchozího. Tvrzení platí i pro obecné matice, kde je však třeba využít jejich Jordanova tvaru, čemuž se zde nevěnujeme. □