Matematika I – 12. přednáška Lineární procesy, diferenční rovnice, Markovovy procesy

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

14. 5. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

1. Lineární procesy
   - Iterované procesy
   - Markovovy procesy
2. Lineární diferenční rovnice

Lineární procesy

Jednoduché lineární procesy jsou dány lineárními zobrazeními $\varphi : V \to W$ na vektorových prostorech. Pokud nám totiž vektor $v \in V$ představuje stav nějakého námi sledovaného jevu (třeba počty občanů tříděných dle nejvyšší dosažené kvalifikace, stav zásob jednotlivých dílů a výrobků atd.), pak $\varphi(v)$ může představovat výsledek provedené operace (výsledek vzdělávací činnosti školské soustavy nebo výroba a prodej za určité časové období apod.). Pokud chceme dosáhnout předem daného výsledku $b \in W$ takového jednorázového procesu, řešíme problém

$$\varphi(x) = b$$

pro neznámý vektor x. V pevně zvolených souřadnicích pak máme matici A zobrazení φ a souřadné vyjádření vektoru b. Jak jsme si ukázali už dříve, řešení příslušné **homogenní úlohy**

$$A \cdot x = 0$$

je vektorovým podprostorem.

Iterované procesy

Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.). Stav x_n je tedy dán vektorem $(a_1, \dots, a_m)$ závisejícím na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme. Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

při přírůstku času z t_k na t_{k+1}.

Iterované procesy

Představme si, že zkoumáme nějaký systém jednotlivců (pěstovaná zvířata, hmyz, buněčné kultury apod) rozdělený do m skupin (třeba podle stáří, fází vývoje hmyzu apod.). Stav x_n je tedy dán vektorem $(a_1, \dots, a_m)$ závisejícím na okamžiku t_n, ve kterém systém pozorujeme. Lineární model vývoje takového systému je dán maticí A dimenze n, která zadává změnu vektoru x_n na

$$x_{n+1} = A \cdot x_n$$

při přírůstku času z t_k na t_{k+1}.
V praktických modelech se často setkáváme se situací, kdy je vývoj systému v jednom časovém období dán lineárním procesem, zajímáme se ale o chování systému po mnoha iteracích. Často přitom samotný lineární proces zůstává pořád stejný, z pohledu našeho matematického modelu tedy nejde o nic jiného než opakované násobení stavového vektoru stále stejnou maticí.

Leslieho model růstu

Dobrým příkladem lineárních procesů je tzv. **Leslieho model růstu**. V takových modelech vystupuje matice popisující vývoj populace rozdělené na několik věkových skupin

$$A = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_4 & 0 \end{pmatrix},$$

kde f_i označuje relativní plodnost příslušné věkové skupiny (ve sledovaném časovém skoku vznikne z N jedinců v i–té skupině $f_i N$ jedinců nových, tj. ve skupině první), zatímco $(1 - \tau_i)$ je relativní úmrtnost i-té skupiny během jednoho období.

Leslieho model růstu (2)

Všechny koeficienty jsou tedy kladná reálná čísla a τ jsou mezi nulou a jedničkou. Přímým výpočtem (třeba využitím Laplaceova rozvoje) nyní spočteme charakteristický polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E) = -\lambda^5 + a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 d\lambda + e$$

s vesměs nezápornými koeficienty a, b, c, d, e, např. $e = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 f_5$. Je tedy

$$p(\lambda) = -\lambda^5(1 - q(\lambda))$$

kde $q(\lambda) = (\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda^2} + \cdots + \frac{e}{\lambda^5})$ je ostře klesající a nezáporná funkce pro $\lambda > 0$. Evidentně bude proto existovat právě jedno kladné λ, pro které bude $q(\lambda) = 1$ a tedy $p(\lambda) = 0$. Jinými slovy, pro každou Leslieho matici existuje právě jedno kladné vlastní číslo.

Pro konkrétní praktické koeficienty (např. když všechny f_i jsou také mezi nulou a jedničkou) typicky dochází k situaci, kdy absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel jsou ostře menší než jedna, zatímco dominantní vlastní číslo bývá větší než jedna. V takovém případě při iteraci kroků (kdy vlastně umocňujeme matici A) našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému přiblížení rozložení populace do věkových skupin k poměrům komponent vlastního vektoru příslušného k **dominantnímu vlastnímu číslu**.

Pro konkrétní praktické koeficienty (např. když všechny f_i jsou také mezi nulou a jedničkou) typicky dochází k situaci, kdy absolutní hodnoty ostatních vlastních čísel jsou ostře menší než jedna, zatímco dominantní vlastní číslo bývá větší než jedna. V takovém případě při iteraci kroků (kdy vlastně umocňujeme matici A) našeho procesu dojde při libovolné počáteční hodnotě x_0 k postupnému přiblížení rozložení populace do věkových skupin k poměrům komponent vlastního vektoru příslušného k **dominantnímu vlastnímu číslu**.

Je-li totiž obecný vektor $x = a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_m \ldots x_m$ lineární kombinací vlastních vektorů $x_1, \ldots, x_m$, příslušných vlastním hodnotám $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, pak po k iteracích dostaneme

$$A^k \cdot x = a_1 \lambda_1^k x_1 + \ldots a_m \lambda_m^k x_m,$$

takže za předpokladu, že $|\lambda_i| < 1$ pro všechna $i \geq 2$, budou všechny komponenty ve vlastních podprostorech velmi rychle mizet, kromě kompomenty $a_1 \lambda_1^k x_1$. Rozložení populace do věkových skupin se tak budou rychle blížit poměrům složek vlastního vektoru příslušného k dominantnímu vlastnímu číslu λ_1.

Leslieho model růstu (3)

Příklad

Například pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03, \; 0, \; -0.5, \; -0,27 + 0.74i, \; -0.27 - 0.74i$$

s velikostmi $1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78$.

Leslieho model růstu (3)

Příklad

Například pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0.95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

vyjdou vlastní hodnoty přibližně

$$1.03,\ 0,\ -0.5,\ -0,27 + 0.74i,\ -0.27 - 0.74i$$

s velikostmi $1.03, 0, 0.5, 0.78, 0.78$.
Vlastním vektorem příslušným dominantnímu vlastnímu číslu 1.03 je přibližně

$$x = (30\ 27\ 21\ 14\ 8).$$

Leslieho model růstu (4)

Příklad

Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysu je následující: v 1.skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku, umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině, víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).

Leslieho model růstu (4)

Příklad

Uvažujme Leslieho model růstu pro populaci krys, které máme rozděleny do tří věkových skupin: do jednoho roku, od jednoho do dvou let a od dvou let do tří. Předpokládáme, že se žádná krysa nedožívá více než tří let. Průměrná porodnost v jednotlivých věkových skupinách připadajících na jednu krysu je následující: v 1.skupině je to nula a ve druhé i třetí 2 krysy. Krysy, které se dožijí jednoho roku, umírají až po druhém roce života (úmrtnost ve druhé skupině je nulová). Určete úmrtnost v první skupině, víte-li, že daná populace krys stagnuje (počet jedinců v ní se nemění).

Řešení

Matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Markovovy procesy a řetězce

Velice častý a zajímavý případ lineárních procesů je popis systému, který se může nacházet v m různých stavech s různou pravděpodobností. V jistém okamžiku je ve stavu s pravděpodobností a_i pro stav i a k přechodu z možného stavu i do stavu j dojde s pravděpodobností t_{ij}.
Můžeme tedy proces zapsat takto: V čase n je systém popsán pravděpodobnostním vektorem $x_n = (a_1, \dots, a_m)$. To znamená, že všechny komponenty vektoru x jsou reálná nezáporná čísla a jejich součet je roven jedné. Komponenty udávají rozdělení pravděpodobnosti jednotlivých možností stavů systému. Rozdělení pravděpodobností pro čas $n + 1$ bude dáno vynásobením pravděpodobnostní maticí přechodu $T = (t_{ij})$, tj.

$$x_{n+1} = T \cdot x_n.$$

Protože předpokládáme, že vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory. Takovému procesu říkáme **Markovův proces**. Všimněme si, že každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij}x_j = \sum_j (\sum_i t_{ij})x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože předpokládáme, že vektor x zachycuje všechny možné stavy, budou všechny sloupce matice T tvořeny také pravděpodobnostními vektory. Takovému procesu říkáme **Markovův proces**. Všimněme si, že každý pravděpodobnostní vektor x je opět zobrazen na vektor se součtem souřadnic jedna:

$$\sum_{i,j} t_{ij}x_j = \sum_j (\sum_i t_{ij})x_j = \sum_j x_j = 1.$$

Protože je součet řádků matice T vždy roven vektoru $(1, \dots, 1)$, je zřejmě matice $T - E$ singulární a jednička proto bude zaručeně vlastním číslem matice T. Abychom mohli podrobněji pochopit chování Markovových procesů, uvedeme si docela snadno pochopitelné obecné tvrzení o maticích, tzv. Perronovu–Frobeniovu větu.

Věta (Perron-Frobenius)

Nechť A je **reálná** *čtvercová matice dimenze m s* **kladnými prvky**. *Pak platí*

1. *existuje reálné vlastní číslo λ_m matice A takové, že pro všechna ostatní vlastní čísla λ platí $|\lambda| < \lambda_m$ (***dominantní vl.č.***),*
2. *vlastní číslo λ_m má algebraickou násobnost jedna,*
3. *vlastní podprostor odpovídající λ_m obsahuje vektor se všemi souřadnicemi kladnými*
4. *platí odhad $\min_j \sum_i a_{ij} \leq \lambda_m \leq \max_j \sum_i a_{ij}$.*

Důsledkem této věty pro Markovovy procesy s maticí, která nemá žádné nulové prvky (nebo jejíž některá mocnina má tuto vlastnost), je

- vlastní číslo 1 je dominantní
- existence vlastního vektoru x_∞ pro vlastní číslo 1, který je pravděpodobnostní
- přibližování hodnoty iterací $T^k x_0$ k vektoru x_∞ pro jakýkoliv pravděpodobnostní vektor x_0.

Příklady Markovových procesů

- viz `lecture13/iterovane_procesy.pdf` (applet `http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm`)

Příklady Markovových procesů

- viz `lecture13/iterovane_procesy.pdf` (applet `http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm`)
- viz `lecture13/google-PageRank.pdf` (resp. `lecture13/SlideGooglePageRank.pdf`)

Příklady Markovových procesů

- viz `lecture13/iterovane_procesy.pdf` (applet `http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm`)
- viz `lecture13/google-PageRank.pdf` (resp. `lecture13/SlideGooglePageRank.pdf`)

Příklady Markovových procesů

- viz lecture13/iterovane_procesy.pdf (applet http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm)
- viz lecture13/google-PageRank.pdf (resp. lecture13/SlideGooglePageRank.pdf)
- Mlsný hazardér (viz prednasky_MB101_podzim2008.pdf)

Příklady Markovových procesů

- viz `lecture13/iterovane_procesy.pdf` (applet `http://cauchy.math.colostate.edu/Applets/PredatorPrey/predatorprey.htm`)
- viz `lecture13/google-PageRank.pdf` (resp. `lecture13/SlideGooglePageRank.pdf`)
- Mlsný hazardér (viz `prednasky_MB101_podzim2008.pdf`)

Příklad

Hazardní hráč sází na to, která strana mince padne. Na začátku hry má tři kremrole. Na každý hod vsadí jednu kremroli a když jeho tip vyjde, tak k ní získá jednu navíc. Pokud ne, tak kremroli prohrává. Hra končí, pokud všechny kremrole prohraje, nebo jich získá pět. Jaká je pravděpodobnost, že hra skončí do čtvrté sázky?

Před j-tým kolem (sázkou) můžeme popsat stav, ve kterém se hráč nachází, náhodným vektorem $X_j = (p_0(j), p_1(j), p_2(j), p_3(j), p_4(j), p_5(j))^T$, kde p_i je pravděpodobnost, že hráč má právě i kremrolí. Pokud má hráč před j-tou sázkou i kremrolí ($i = 1, 2, 3, 4$), tak po sázce má s poloviční pravděpodobností $i - 1$ kremrolí a s poloviční pravděpodobností $i + 1$ kremrolí. Pokud dosáhne pěti kremrolí nebo pokud všechny prohraje, již se počet kremrolí nemění.

Před j-tým kolem (sázkou) můžeme popsat stav, ve kterém se hráč nachází, náhodným vektorem $X_j = (p_0(j), p_1(j), p_2(j), p_3(j), p_4(j), p_5(j))^T$, kde p_i je pravděpodobnost, že hráč má právě i kremrolí. Pokud má hráč před j-tou sázkou i kremrolí ($i = 1, 2, 3, 4$), tak po sázce má s poloviční pravděpodobností $i - 1$ kremrolí a s poloviční pravděpodobností $i + 1$ kremrolí. Pokud dosáhne pěti kremrolí nebo pokud všechny prohraje, již se počet kremrolí nemění. Vektor X_{j+1} proto získáme z vektoru X_j vynásobením maticí

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Na začátku máme $X_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T$, tedy vektor $X_4 = A^4 X_0 = (\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, 0, \frac{5}{16}, 0, \frac{3}{8})$, popisuje situaci po čtyřech sázkách. Pravděpodobnost, že hra skončí do čtvrté sázky (včetně) – tj. pravděpodobnost, že bude hráč mít nula nebo pět kremrolí – je rovna součtu první a poslední hodnoty ve vektoru X_4, tj. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

Všimněme si ještě, že matice A popisující vývoj pravděpodobnostního vektoru X je pravděpodobnostní, tedy má součet prvků v každém sloupci 1. Nemá ale vlastnost vyžadovanou v Perronově–Frobeniově větě a snadným výpočtem zjistíte (nebo přímo uvidíte bez počítání), že existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné k vlastnímu číslu $\lambda = 1$ – případ, kdy hráči nezůstane žádná kremrole, tj. $x = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$, nebo případ kdy získá 5 kremrolí a hra tím pádem končí a všechny mu už zůstávají, tj. $x = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$. Všechna ostatní vlastní čísla (přibližně 0.8, 0.3, -0.8, -0.3) jsou v absolutní hodnotě menší než jedna. Proto komponenty v příslušných vlastních podprostorech při iteraci procesu s libovolnou počáteční hodnotou vymizí a proces se blíží k limitní hodnotě pravděpodobnostího vektoru tvaru $x_\infty := (a, 0, 0, 0, 0, 1 - a)^T$, kde hodnota a závisí na počtu kremrolí, se kterými hráč začíná. V našem případě je to $a = 0.4$. (Kdyby začal se 4 kremrolemi, bylo by to $a = 0.2$ atd.)

Plán přednášky

Lineární diferenční rovnice

Definice

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel. Známe–li *počáteční* hodnotu $f(0)$, můžeme spočítat $f(1) = F(0, f(0))$, poté $f(2) = F(1, f(1))$ atd. Tímto postupným způsobem můžeme tedy nakonec spočítat hodnotu $f(n)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Všimněme si, že tato úvaha je podobná konstrukci přirozených čísel z prázdné množiny nebo principu matematické indukce.

Lineární diferenční rovnice

Definice

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel. Známe–li *počáteční* hodnotu $f(0)$, můžeme spočítat $f(1) = F(0, f(0))$, poté $f(2) = F(1, f(1))$ atd. Tímto postupným způsobem můžeme tedy nakonec spočítat hodnotu $f(n)$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Všimněme si, že tato úvaha je podobná konstrukci přirozených čísel z prázdné množiny nebo principu matematické indukce. Jako příklad může sloužit definiční formule pro faktoriál, tj.

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i na hodnotě $f(n)$.

Lineární diferenční rovnice

Definice

Dalším obzvlášť jednoduchým příkladem je $f(n) = C$ pro nějaký pevný skalár C a všechna n a tzv. **lineární diferenční rovnice**

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde $a \neq 0$, a b jsou známé skaláry.

Lineární diferenční rovnice

Definice

Dalším obzvlášť jednoduchým příkladem je $f(n) = C$ pro nějaký pevný skalár C a všechna n a tzv. **lineární diferenční rovnice**

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde $a \neq 0$, a b jsou známé skaláry.

Takovou diferenční rovnici umíme snadno řešit, je-li $b = 0$. Pak se totiž jedná o dobře známou rekurentní definici geometrické posloupnosti a platí $f(1) = af(0), \quad f(2) = af(1) = a^2 f(0)$ atd. Máme tedy pro všechna n

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu.

Dokážeme si obecný výsledek pro rovnice prvního řádu, které se podobají lineárním, ale připouští proměnné koeficienty a a b,

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n.$$

Dokážeme si obecný výsledek pro rovnice prvního řádu, které se podobají lineárním, ale připouští proměnné koeficienty a a b,

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n.$$

Tvrzení

Obecné řešení diferenční rovnice prvního řádu s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je dáno vztahem

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) y_0 + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a_i\right) b_j + b_{n-1}.$$

Dokážeme si obecný výsledek pro rovnice prvního řádu, které se podobají lineárním, ale připouští proměnné koeficienty a a b,

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n.$$

Tvrzení

Obecné řešení diferenční rovnice prvního řádu s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je dáno vztahem

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) y_0 + \sum_{j=0}^{n-2} \left(\prod_{i=j+1}^{n-1} a_i\right) b_j + b_{n-1}.$$

Důsledek

Obecné řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $a \neq 1$, b a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1-a^n}{1-a} b.$$

Lineární diferenční rovnice vyššího řádu

Nyní si ukážeme obecnou teorii pro lineární rovnice s konstantními koeficienty, která poskytuje nejen velmi praktické nástroje, ale je také pěknou ilustrací pro koncepty vektorových podprostorů a lineárních zobrazení.

Definice

Homogenní lineární diferenční rovnice řádu k je dána výrazem

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0, \quad a_0 \neq 0 \quad a_k \neq 0,$$

kde koeficienty a_i jsou skaláry, které mohou případně i záviset na n.

Říkáme také, že taková rovnost zadává **homogenní lineární rekurenci** řádu k a často zapisujeme hledanou posloupnost jako funkci

$$x_n = f(n) = -\frac{a_1}{a_0} f(n-1) - \dots - \frac{a_k}{a_0} f(n-k).$$

Řešením této rovnice nazýváme posloupnost skalárů x_i, pro všechna $i \in \mathbb{N}$, případně $i \in \mathbb{Z}$, které vyhovují rovnici s libovolným pevným n.

Říkáme také, že taková rovnost zadává **homogenní lineární rekurenci** řádu k a často zapisujeme hledanou posloupnost jako funkci

$$x_n = f(n) = -\frac{a_1}{a_0} f(n-1) - \dots - \frac{a_k}{a_0} f(n-k).$$

Řešením této rovnice nazýváme posloupnost skalárů x_i, pro všechna $i \in \mathbb{N}$, případně $i \in \mathbb{Z}$, které vyhovují rovnici s libovolným pevným n.
Prostor všech nekonečných posloupností x_i je vektorový prostor, kde sčítání i násobení skaláry je dáno po složkách. Přímo z definice je zjevné, že součet dvou řešení homogenní lineární rovnice nebo skalární násobek řešení je opět řešení. Stejně jako u homogenních systémů lineárních tedy vidíme, že množina všech řešení je vektorový podprostor.

Počáteční podmínka na hodnoty řešení je dána jako k–rozměrný vektor v $\mathbb{K}^k$. Součtu počátečních podmínek odpovídá součet příslušných řešení a obdobně se skalárními násobky. Dále si všimněme, že dosazením nul a jedniček do zadávaných počástečních k hodnot snadno získáme k lineárně nezávislých řešení naší rovnice. Jakkoliv jsou tedy zkoumané vektory nekonečné posloupnosti skalárů, samotný prostor všech řešení je konečněrozměrný, předem víme, že jeho dimenze bude rovna řádu rovnice k, a umíme snadno určit bázi všech těchto řešení. Opět hovoříme o **fundamentálním systému řešení** a všechna ostatní řešení jsou právě jejich lineární kombinace.

Řešení homogenních rekurencí s konstantními koeficienty

V praktických modelech velice často vystupují rovnice, kde jsou koeficienty konstantní. V tomto případě se daří uhodnout vhodnou formu řešení a skutečně se nám podaří najít k lineárně nezávislých možností. Tím budeme mít problém vyřešený, protože všechny ostatní budou jejich lineární kombinací.

Řešení homogenních rekurencí s konstantními koeficienty

V praktických modelech velice často vystupují rovnice, kde jsou koeficienty konstantní. V tomto případě se daří uhodnout vhodnou formu řešení a skutečně se nám podaří najít k lineárně nezávislých možností. Tím budeme mít problém vyřešený, protože všechny ostatní budou jejich lineární kombinací.

Pro jednoduchost začneme rovnicemi druhého řádu. Takové potkáváme obzvlášť často v praktických problémech, kde se vyskytují vztahy závisející na dvou předchozích hodnotách. Lineární diferenční rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty (resp. lineární rekurencí druhého řádu s konstantními koeficienty) tedy rozumíme předpis

$$f(n+2) = a \cdot f(n+1) + b \cdot f(n) + c,$$

kde a, b, c jsou známé skalární koeficienty.

Např. v populačních modelech můžeme zohlednit, že jedinci v populaci dospívají a pořádně se rozmnožují až o dvě období později (tj. přispívají k hodnotě $f(n+2)$ násobkem $b \cdot f(n)$ s kladným $b > 1$), zatímco nedospělí jedinci vysílí a zničí část dospělé populace (tj. koeficient a pak bude záporný). Navíc si je třeba někdo pěstuje a průběžně si ujídá konstantní počet $c < 0$ v každém jednotlivém období.
Speciálním takovým příkladem s $c = 0$ je např. Fibonacciho posloupnost čísel $y_0, y_1, \dots$, kde $y_{n+2} = y_{n+1} + y_n$.

Zkusme nyní stejně jako v případě rovnic 1. řádu dosadit volbu $x_n = \lambda^n$ pro nějaký (zatím neznámý) skalár λ do obecné homogenní rovnice z definice. Dostáváme pro každé n podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Charakteristický polynom ale už není závislý na n.

Zkusme nyní stejně jako v případě rovnic 1. řádu dosadit volbu $x_n = \lambda^n$ pro nějaký (zatím neznámý) skalár λ do obecné homogenní rovnice z definice. Dostáváme pro každé n podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} \cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Charakteristický polynom ale už není závislý na n.
Předpokládejme, že má charakteristický polynom k různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení

$$x_n = (\lambda_i)^n.$$

Abychom byli uspokojeni, potřebujeme k lineárně nezávislých řešení, což vede na výpočet Vandermondova determinantu. Nalezli jsme tedy fundamentální systém řešení homogenní diferenční rovnice v případě, že všechny kořeny jejího charakteristického polynomu jsou po dvou různé.

Zkusme nyní stejně jako v případě rovnic 1. řádu dosadit volbu $x_n = \lambda^n$ pro nějaký (zatím neznámý) skalár λ do obecné homogenní rovnice z definice. Dostáváme pro každé n podmínku

$$\lambda^{n-k}(a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1}\cdots + a_k) = 0$$

což znamená, že buď $\lambda = 0$ nebo je λ kořenem tzv. **charakteristického polynomu** v závorce. Charakteristický polynom ale už není závislý na n.
Předpokládejme, že má charakteristický polynom k různých kořenů $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Každý z kořenů nám dává jedno možné řešení

$$x_n = (\lambda_i)^n.$$

Abychom byli uspokojeni, potřebujeme k lineárně nezávislých řešení, což vede na výpočet Vandermondova determinantu. Nalezli jsme tedy fundamentální systém řešení homogenní diferenční rovnice v případě, že všechny kořeny jejího charakteristického polynomu jsou po dvou různé. V případě násobných kořenů dále *vstupují do hry* řešení tvaru $n^\ell\lambda^n$.

Věta

Každá homogenní lineární diferenční rovnice řádu k nad libovolným číselným oborem $\mathbb{K}$ obsaženým v komplexních číslech $\mathbb{K}$ má za množinu všech řešení k–rozměrný vektorový prostor generovaný posloupnostmi $x_n = n^\ell \lambda^n$, kde λ jsou (komplexní) kořeny charakteristického polynomu a mocniny ℓ probíhají všechna přirozená čísla od nuly až do násobnosti příslušného kořenu λ.

Věta

Každá homogenní lineární diferenční rovnice řádu k nad libovolným číselným oborem $\mathbb{K}$ obsaženým v komplexních číslech $\mathbb{K}$ má za množinu všech řešení k–rozměrný vektorový prostor generovaný posloupnostmi $x_n = n^\ell \lambda^n$, kde λ jsou (komplexní) kořeny charakteristického polynomu a mocniny ℓ probíhají všechna přirozená čísla od nuly až do násobnosti příslušného kořenu λ.

Stejně jako u systémů lineárních rovnic můžeme dostat všechna řešení **nehomogenních lineárních diferenčních rovnic**

$$a_0(n)x_n + a_1(n)x_{n-1} + \cdots + a_k(n)x_{n-k} = b(n),$$

kde koeficienty a_i a b jsou skaláry, které mohou záviset na n, a $a_0(n) \neq$, $a_k(n) \neq 0$.
Postupujeme tak, že najdeme jedno řešení a přičteme celý vektorový prostor dimenze k řešení odpovídajících systémů homogenních. Skutečně takto dostáváme řešení a protože je rozdíl dvou řešení nehomogenní rovnice zjevně řešením homogenní, dostáváme takto řešení všechna.

Příklad

Řešte rekurenci:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 2, y_1 = 0$.

Příklad

Řešte rekurenci:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 2, y_1 = 0$.

Řešení

Obecné řešení je tvaru $y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$, kde λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristického polynomu $x^2 - x - \frac{1}{2}$.

Příklad

Řešte rekurenci:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 2, y_1 = 0$.

Řešení

Obecné řešení je tvaru $y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, kde λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristického polynomu $x^2 - x - \frac{1}{2}$.
Máme tedy $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$ a z počátečních podmínek
$y_0 = C_1 + C_2 = 2$, resp. $y_1 = \frac{1}{2}C_1(1+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}C_2(1-\sqrt{3})$

Příklad

Řešte rekurenci:

$$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{1}{2} y_n$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 2, y_1 = 0$.

Řešení

Obecné řešení je tvaru $y_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$, kde λ_1, λ_2 jsou kořeny charakteristického polynomu $x^2 - x - \frac{1}{2}$.
Máme tedy $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3})$ a z počátečních podmínek
$y_0 = C_1 + C_2 = 2$, resp. $y_1 = \frac{1}{2}C_1(1+\sqrt{3}) + \frac{1}{2}C_2(1-\sqrt{3})$
Dostáváme jediné řešení

$$f(n) = (1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})\frac{1}{2^n}(1+\sqrt{3})^n + (1 + \frac{1}{3}\sqrt{3})\frac{1}{2^n}(1-\sqrt{3})^n.$$