Matematika I – 2. přednáška

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

27. 2. 2012

Obsah přednášky

Plán přednášky

1. Kombinatorika – pokračování
   - Permutace, kombinace a variace
   - Permutace, kombinace a variace s opakováním
2. Diferenční rovnice
3. Pravděpodobnost

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n - 1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.

Permutace

Z množiny n předmětů vytváříme pořadí jejich prvků.
Pro volbu prvního prvku je n možností, další je volen z $n-1$ možností atd., až nám nakonec zbude jediný poslední prvek.
Proto je na dané konečné množině S s n prvky právě $n!$ různých pořadí. Hovoříme o **permutacích** prvků množiny S.
Jestliže si předem prvky v S očíslujeme, tj. ztotožníme si S s množinou $S = \{1, \dots, n\}$ n přirozených čísel, pak permutace odpovídají možným pořadím čísel od jedné do n.
Dokázali jsme tak:
Počet různých pořadí na konečné množině s n prvky je dán funkcí faktoriál:

$$f(n) = n!$$

Kombinace

Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené formulí je počet způsobů, kterými lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů.

Kombinace

Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené formulí je počet způsobů, kterými lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů.
Zjevně máme $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ možných výsledků postupného výběru našich k prvků, přitom ale stejnou výslednou k-tici dostaneme v $k!$ různých pořadích.

Kombinace

Dalším jednoduchým příkladem hodnoty určené formulí je počet způsobů, kterými lze vybrat k různých rozlišitelných předmětů z množiny n předmětů.

Zjevně máme $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ možných výsledků postupného výběru našich k prvků, přitom ale stejnou výslednou k-tici dostaneme v $k!$ různých pořadích.

Dokázali jsme tedy:

Pro počet **kombinací k-tého stupně** z n prvků platí (samozřejmě je $k \leq n$)

$$c(n,k) = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Číslům $c(n,k)$ říkáme **binomická čísla**.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**. Jak jsme si již ověřili:
Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**. Jak jsme si již ověřili:
Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).
Binomická čísla dostala svůj název od tzv. binomického rozvoje:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

protože koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ je roven právě počtu možností, jak vybrat k-tici z n závorek v součinu.

Pokud nám ale záleží i na pořadí vybrané k-tice prvků, hovoříme o **variaci k-tého stupně**. Jak jsme si již ověřili:
Pro počet variací platí

$$v(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

pro všechny $0 \leq k \leq n$ (a nula jinak).
Binomická čísla dostala svůj název od tzv. binomického rozvoje:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

protože koeficient u mocniny $a^k b^{n-k}$ je roven právě počtu možností, jak vybrat k-tici z n závorek v součinu.
Všimněme si, že pro odvození jsme potřebovali pouze distributivitu, komutativnost a asociativitu násobení a sčítání. Formule proto platí v každém komutativním okruhu.

Jako ukázku, jak vypadá matematický důkaz si odvoďme několik jednoduchých tvrzení o kombinačních číslech. Definujme $\binom{n}{k} = 0$, kdykoliv je buď $k < 0$ nebo $k > n$.

Pro všechna přirozená čísla k a n platí

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Pascalův trojúhelník

Všechna kombinační čísla si můžeme sestavit do tzv. **Pascalova trojúhelníku**, kde každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & \\
n=1: & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & \\
n=2: & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\
n=3: & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 & \\
n=4: 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 \\
n=5: & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 &
\end{array}
$$

Pascalův trojúhelník

Všechna kombinační čísla si můžeme sestavit do tzv. **Pascalova trojúhelníku**, kde každé číslo obdržíme jako součet dvou bezprostředně nad ním ležících sousedů:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & 0 & & 1 & & 0 & & & & \\
n=1: & & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & & \\
n=2: & & 0 & & 1 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\
n=3: & & & 0 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 0 \\
n=4: & 0 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & 0 \\
n=5: & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

V jednotlivých řádcích máme právě koeficienty u jednotlivých mocnin z binomického rozvoje, např.

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Pořadí n prvků, z nichž mezi některými nerozlišujeme, nazýváme **permutace s opakovaním**. Nechť je mezi n danými prvky p_1 prvků prvního druhu, p_2 prvků druhého druhu, . . . , p_k prvků k-tého druhu, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$, potom počet pořadí těchto prvků s opakováním budeme značit $P(p_1, \ldots, p_k)$. Zřejmě platí:

$$P(p_1, \ldots, p_k) = \frac{n!}{p_1! \cdots p_k!}.$$

Volný výběr prvků z n možností, včetně pořadí, nazýváme **variace k-tého stupně s opakováním**, jejich počet budeme značit $V(n,k)$. Předpokládáme, že stále máme pro výběr stejně možností, např. díky tomu, že vybrané prvky před dalším výběrem vracíme nebo třeba házíme pořád stejnou kostkou. Zřejmě platí:

$$V(n,k) = n^k.$$

Pokud nás výběr zajímá bez zohlednění pořadí, hovoříme o **kombinacích s opakováním** a pro jejich počet píšeme $C(n, k)$. Počet kombinací s opakováním k-té třídy z n prvků je pro všechny $0 \leq k$ a $0 < n$

$$C(n, k) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Plán přednášky

1. Kombinatorika – pokračování
   - Permutace, kombinace a variace
   - Permutace, kombinace a variace s opakováním
2. Diferenční rovnice
3. Pravděpodobnost

V předchozích odstavcích jsme viděli formule, které zadávaly hodnotu skalární funkce definované na přirozených číslech (faktoriál) nebo dvojicích čísel (binomická čísla) pomocí předcházejících hodnot. Tomu lze rozumět také tak, že místo hodnoty naší funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné. Např.

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}$$

říká, že rozdíl počtu možností, jak vybrat $k+1$ prvků z $n+1$ možností, je vyjádřitelný pomocí (možná již známé) hodnoty.

V předchozích odstavcích jsme viděli formule, které zadávaly hodnotu skalární funkce definované na přirozených číslech (faktoriál) nebo dvojicích čísel (binomická čísla) pomocí předcházejících hodnot. Tomu lze rozumět také tak, že místo hodnoty naší funkce zadáváme její změnu při odpovídající změně nezávislé proměnné. Např.

$$\binom{n+1}{k+1} - \binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}$$

říká, že rozdíl počtu možností, jak vybrat $k+1$ prvků z $n+1$ možností, je vyjádřitelný pomocí (možná již známé) hodnoty.

Takto se skutečně velice často postupuje při matematické formulaci modelů, které popisují reálné systémy v ekonomice, biologii apod. My si tu povšimneme jen nejednodušších případů a budeme se k této tématice postupně vracet.

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel.

Obecnou **diferenční rovnicí prvního řádu** rozumíme výraz

$$f(n+1) = F(n, f(n)),$$

kde F je známá skalární funkce závislá na dvojicích přirozených čísel.

Je zřejmé, že takový vztah, spolu s volbou pro $f(0)$, zadává jednoznačně celou nekonečnou posloupnost hodnot $f(0), f(1), \dots, f(n), \dots$. Jako příklad může sloužit definiční formule pro faktoriál, tj.

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Vidíme, že skutečně vztah pro $f(n+1)$ závisí na n i na hodnotě $f(n)$.

lineární diferenční rovnice

Po konstantní závislosti je nejjednodušší

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde a, $b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

lineární diferenční rovnice

Po konstantní závislosti je nejjednodušší

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu.

lineární diferenční rovnice

Po konstantní závislosti je nejjednodušší

$$f(n+1) = a \cdot f(n) + b,$$

kde a, $b \in \mathbb{N}$. Takovou rovnici umíme snadno řešit. Je-li $b = 0$, pak zjevně

$$f(n) = a^n f(0).$$

To je např. vztah pro tzv. Malthusiánský model populačního růstu, který vychází z představy, že za zvolený časový interval vzroste populace s konstantní úměrou a vůči předchozímu stavu. Rovnice s b nenulovým se objeví při úročení (ať už vkladu nebo půjčky – jde jen o znaménko ...)

Obecně pro rovnice prvního řádu s proměnnými koeficienty platí
Obecné řešení diferenční rovnice prvního řádu

$$f(n+1) = a_n \cdot f(n) + b_n$$

s počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je dáno vztahem

$$f(n) = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\prod_{i=r+1}^{n-1} a_i\right) b_r .$$

Obecné řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $a \neq 1$, b a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

Obecné řešení lineární diferenční rovnice prvního řádu s konstantními koeficienty $a \neq 1$, b a počáteční podmínkou $f(0) = y_0$ je

$$f(n) = a^n y_0 + \frac{1 - a^n}{1 - a} b.$$

formule dostáváme první sčítanec okamžitě.
Pro vyčíslení součtu součinů v druhém si je třeba všimnout, že se jedná o výrazy $(1 + a + \cdots + a^{n-1})b$. Sečtením této geometrické řady (připomeňme, že $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1})$) dostaneme právě požadovaný výsledek.

Uveďme si praktický příklad na řešení diferenčních rovnic prvního řádu:

Example

Mirek si chce koupit nové auto. Auto stojí 300 000 Kč. Mirek by chtěl auto koupit na měsíční splátky. Prodávající společnost mu nabízí půjčku na koupi auta s ročním úrokem 6%. Mirek bych chtěl auto splatit za tři roky. Jak vysoká bude měsíční splátka?

Plán přednášky

Viděli jsme už funkce, jejichž hodnoty byly dány formulí nebo popisem změny hodnoty v závislosti na změnách závislé proměnné.

Viděli jsme už funkce, jejichž hodnoty byly dány formulí nebo popisem změny hodnoty v závislosti na změnách závislé proměnné.
Další obvyklý případ – sledované hodnoty jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.
Nejbanálnější příklad: házení kostkou s šesti stranami s označeními $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Matematický model takového házení „poctivou" kostkou předepisuje, že každá ze stran padá stejně často.

Viděli jsme už funkce, jejichž hodnoty byly dány formulí nebo popisem změny hodnoty v závislosti na změnách závislé proměnné. Další obvyklý případ – sledované hodnoty jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.

Nejbanálnější příklad: házení kostkou s šesti stranami s označeními $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Matematický model takového házení „poctivou“ kostkou předepisuje, že každá ze stran padá stejně často.

Pro konkrétní kostku je ale jisté, že skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné. Z velikého počtu pokusů lze usoudit na relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů a tyto ustanovit jako pravděpodobnosti v našem matematickém popisu.

Viděli jsme už funkce, jejichž hodnoty byly dány formulí nebo popisem změny hodnoty v závislosti na změnách závislé proměnné.
Další obvyklý případ – sledované hodnoty jsou výsledkem nějaké nahodilosti a my se snažíme popsat s jakou *pravděpodobností* nastane ta či ona možnost.
Nejbanálnější příklad: házení kostkou s šesti stranami s označeními $1, 2, 3, 4, 5, 6$.
Matematický model takového házení „poctivou" kostkou předepisuje, že každá ze stran padá stejně často.
Pro konkrétní kostku je ale jisté, že skutečné relativní četnosti výsledků nebudou stejné. Z velikého počtu pokusů lze usoudit na relativní četnosti jednotlivých výsledků hodů a tyto ustanovit jako pravděpodobnosti v našem matematickém popisu.
Nicméně při sebevětším počtu pokusů nemůžeme vyloučit možnost, že se náhodou povedla velice nepravděpodobná kombinace výsledků a že se tím náš matematický model skutečnosti stal (pro tento konkrétní případ) nedobrým.

V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku (ta ale umí pomoci).

V matematice pracujeme s abstraktním matematickým popisem pravděpodobnosti. To, do jaké míry je takový popis adekvátní pro konkrétní pokusy či jiný problém, je záležitostí mimo samotnou matematiku (ta ale umí pomoci).
Vrátíme se k tomuto tématu, ale až na konci čtvrtého semestru v matematické statistice! Jde o teorii umožňující posoudit, do jaké míry lze očekávat, že vybraný model je ve shodě s realitou. K jejímu studiu bude již potřebný dosti rozsáhlý matematický aparát.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.
Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný **jev**.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Pro jednoduchost bude pro nás Ω konečná množina s prvky $\omega_1, \dots, \omega_n$, představujícími jednotlivé **možné výsledky**.
Každá podmnožina $A \subset \Omega$ představuje možný **jev**.
Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru se nazývá **jevové pole**, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor, je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- jsou-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \cup B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich sjednocení.

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Jevové pole je tedy systém podmnožin (konečného) základního prostoru uzavřený na průniky, sjednocení a rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny A, $B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Pro naše házení kostkou je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jevové pole je tvořeno všemi podmnožinami. Např. náhodný jev $\{1, 3, 5\}$ pak interpretujeme jako „padne liché číslo".

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i\in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i\in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných modelů:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá **opačný jev k jevu** A, píšeme $B = A^c$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, kdykoliv je $A \cap B = \emptyset$ a $A, B \in \mathcal{A}$,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.
Additivnost platí pro jakýkoliv konečný počet neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, tj.

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i), \text{ kdykoliv je } A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j \in I.$$

Definition (Klasická konečná pravděpodobnost)

Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω. **Klasická pravděpodobnost** je takový pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost.

Jako příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy, budeme pozorovat součty při hodu více kostkami.

Jako příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy, budeme pozorovat součty při hodu více kostkami.
Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěmi kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b), tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$.

Jako příklad, jak z házení kostkou dostat různě pravděpodobné jevy, budeme pozorovat součty při hodu více kostkami.
Uvažujme takto: při hodu jednou kostkou je každý výsledek stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. Při hodu dvěmi kostkami je každý předem zvolený výsledek (a, b), tj. dvojice přirozených čísel od jedné do šesti (včetně pořadí), stejně pravděpodobný s pravděpodobností $\frac{1}{36}$.
Pokud se budeme ptát po dvou pětkách, je tedy pravděpodobnost poloviční než u dvou různých hodnot bez uvedení pořadí. Pro jednotlivé možné součty uvedené v horním řádku nám vychází počet možností v řádku dolním:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Následující věta je promítnutím tzv. kombinatorického **principu inkluze a exkluze** do naší konečné pravděpodobnosti:

Theorem

Buďte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem $\mathcal{A}$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{k} A_i) = {} & \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P(A_i \cap A_j) \\
& + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\
& - \cdots \\
& + (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k).
\end{aligned}
$$

Následující věta je promítnutím tzv. kombinatorického **principu inkluze a exkluze** do naší konečné pravděpodobnosti:

Theorem

Buďte $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ libovolné jevy na základním prostoru Ω s jevovým polem $\mathcal{A}$. Pak platí

$$
\begin{aligned}
P(\cup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i) &- \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} P(A_i \cap A_j) \\
&+ \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{\ell=j+1}^{k} P(A_i \cap A_j \cap A_\ell) \\
&- \cdots \\
&+ (-1)^{k-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k).
\end{aligned}
$$

Jde o dobrý příklad matematického tvrzení, kde nejtěžší je najít dobrou formulaci a pak se dá říci, že (intuitivně) je tvrzení zřejmé.

Princip inkluze a exkluse

Speciálním případem předchozí věty je situace, kdy všechny konečné podmnožniny základního prostoru jsou jevy a všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost. Ve formuli z předchozí věty pak všechny pravděpodobnosti dávají právě počet prvků příslušných podmnožin, až na společný faktor $\frac{1}{n}$, kde n je počet prvků základního prostoru. Pak můžeme vyčíst následující tvrzení pro obecnou konečnou množinu M a její podmnožiny $A_1, \dots, A_k$. Budeme psát $|M|$ pro počet prvků množiny M, tj. pro **mohutnost** množiny M.

$$|M \setminus (\cup_{i=1}^{k} A_i)| = |M| + \sum_{j=1}^{k} \left((-1)^i \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_j \le k} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j})| \right).$$

Tomuto tvrzení o množinách se říká **princip inkluze a exkluze**.