Matematika I – 5. přednáška
Elementární lineární algebra – Vektory a matice

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 3. 2012

Obsah přednášky

1. Vektory
2. Matice nad skaláry
   - Lineární rovnice a jejich soustavy
3. Ekvivalentní úpravy matic
4. Lineární závislost

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

1 Vektory

2 Matice nad skaláry
- Lineární rovnice a jejich soustavy

3 Ekvivalentní úpravy matic

4 Lineární závislost

Definice

Symbolem $\mathbb{K}$ budeme nadále značit nějakou množinu skalárů (obvykle $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Prozatím budeme **vektorem** rozumět uspořádanou n-tici skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat **dimenzí**.

Definice

Symbolem $\mathbb{K}$ budeme nadále značit nějakou množinu skalárů (obvykle $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Prozatím budeme **vektorem** rozumět uspořádanou n-tici skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat **dimenzí**.

Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme)

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

Definice

Symbolem $\mathbb{K}$ budeme nadále značit nějakou množinu skalárů (obvykle $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$). Prozatím budeme **vektorem** rozumět uspořádanou n-tici skalárů, kde pevně zvolené $n \in \mathbb{N}$ budeme nazývat **dimenzí**.

Sčítání vektorů definujeme po složkách (skaláry samozřejmě sčítat umíme)

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

a **násobení** vektoru $u = (u_1, \ldots, u_n)$ **skalárem** a definujeme tak, že každý prvek n-tice u vynásobíme skalárem a (skaláry v $\mathbb{K}$ násobit umíme), tj.

$$a \cdot u = a \cdot (u_1, \ldots, u_n) = (a \cdot u_1, \ldots, a \cdot u_n).$$

Pro vektory a jejich sčítání zjevně platí axiomy komutativní grupy s nulovým prvkem

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Záměrně zde používáme pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů.

Pro vektory a jejich sčítání zjevně platí axiomy komutativní grupy s nulovým prvkem

$$0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n.$$

Záměrně zde používáme pro nulový prvek stejný symbol jako pro nulový prvek skalárů.

Konvence značení

Podobně budeme pro sčítání a násobení používat stále stejný symbol (plus a buď tečku nebo prosté zřetězení znaků). Navíc nebudeme používat pro vektory žádné speciální značení, a ponecháváme na čtenáři aby udržoval svoji pozornost přemýšlením o kontextu. Pro skaláry ale spíše budeme používat písmena ze začátku abecedy a pro vektory od konce (prostředek nám zůstane na indexy proměných a pro použití v součtech).

Vlastnosti operací na vektorech

Pro všechny vektory $v, w \in \mathbb{K}^n$ a skaláry $a, b \in \mathbb{K}$ platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Skalární součin reálných vektorů

Skalární součin dvou vektorů $u, v \in \mathbb{R}^n$ je **reálné číslo**

$$u \cdot v = (u_1, \ldots, u_n) \cdot (v_1, \ldots, v_n) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i .$$

Skalární součin lze tedy brát jako zobrazení $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Skalární součin reálných vektorů

Skalární součin dvou vektorů $u, v \in \mathbb{R}^n$ je **reálné číslo**

$$u \cdot v = (u_1, \dots, u_n) \cdot (v_1, \dots, v_n) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i .$$

Skalární součin lze tedy brát jako zobrazení $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Příklad

$$(1, 2, 3) \cdot (2, -3, 1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 2 - 6 + 3 = -1$$

Pozor! Nepleťte si násobení vektoru skalárem (tj. násobení vektoru číslem, kdy je výsledek opět vektor) se **skalárním součinem** (dvou vektorů, kdy je výsledek číslo)!

Pomocí skalárního součinu lze zjednodušit geometrický vztah pro úhel dvou vektorů

$$\cos\psi = \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|},$$

případně zavést pojem **kolmosti** mezi vektory, tj. $u \perp v$ pokud $u \cdot v = 0$ (neboli $\cos\psi = 0$, tj. $\psi = \frac{\pi}{2}$).
Všimněte si, že pro velikost vektoru $u = (u_1, \dots, u_n)$ platí

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{u \cdot u}, \quad \text{neboli} \quad u \cdot u = \|u\|^2.$$

Je-li dimenze obou vektorů 1, je zřejmě skalární násobení vektorů (= čísel) obyčejným násobením čísel.

Plán přednášky

1. Vektory
2. Matice nad skaláry
   - Lineární rovnice a jejich soustavy
3. Ekvivalentní úpravy matic
4. Lineární závislost

Definice

Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

Definice

Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.
(Řádkové) vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme (i–té) **řádky matice** A, $i = 1, \dots, m$, (sloupcové) vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme (j–té) **sloupce matice** A, $j = 1, \dots, n$.

Definice

Maticí typu m/n nad skaláry $\mathbb{K}$ rozumíme obdélníkové schéma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kde $a_{ij} \in \mathbb{K}$ pro všechny $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Matici A s prvky a_{ij} značíme také $A = (a_{ij})$.

(Řádkové) vektory $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ nazýváme (i–té) **řádky matice** A, $i = 1, \dots, m$, (sloupcové) vektory $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ nazýváme (j–té) **sloupce matice** A, $j = 1, \dots, n$.

Matici můžeme také chápat jako zobrazení $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$.

Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně právě vektory v $\mathbb{K}^n$. Obecné matice lze však chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m \cdot n}$, prostě zapomeneme na řádkování. Zejména tedy je definováno **sčítání matic** a **násobení matic skaláry**:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$a \cdot A = (a.a_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $a \in \mathbb{K}$.

Matice typu $1/n$ nebo $n/1$ jsou vlastně právě vektory v $\mathbb{K}^n$. Obecné matice lze však chápat jako vektory v $\mathbb{K}^{m \cdot n}$, prostě zapomeneme na řádkování. Zejména tedy je definováno **sčítání matic** a **násobení matic skaláry**:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$,

$$a \cdot A = (a.a_{ij}),$$

kde $A = (a_{ij})$, $a \in \mathbb{K}$.
Dále pak matice

$$-A = (-a_{ij})$$

se nazývá **matice opačná** k matici A.

Konečně, matice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se nazývá **nulová matice**.

Konečně, matice

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

se nazývá **nulová matice**.
Zapomenutím řádkování tak získáme následující tvrzení:

Věta

Předpisy pro $A + B$, $a \cdot A$, $-A$, 0 *zadávají na množině všech matic typu* m/n *operace sčítání a násobení skaláry splňující axiomy (V1)–(V4).*

Lineární rovnice a jejich soustavy

Lineární rovnice je rovnice typu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$x_1, \ldots, x_n$ jsou **neznámé** (též **proměnné**), $a_1, \ldots, a_n, b$ jsou **koeficienty**.

Lineární rovnice a jejich soustavy

Lineární rovnice je rovnice typu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

$x_1, \ldots, x_n$ jsou **neznámé** (též **proměnné**), $a_1, \ldots, a_n, b$ jsou **koeficienty**.

Příklad

Rovnice

(a) $2x_1 + ax_2 - x_3 = 1$ je lineární,

(b) $2x_1 + ax_2^2 - x_3 = 1$ není lineární,

(c) $2x_1 + ax_2x_3 - x_3 = 1$ není lineární,

(d) $2x_1 - x_3 = 1$ je lineární.

Maticový zápis systémů lineárních rovnic

Matice lze vhodně využít pro zápis lineárních rovnic. Uvažme následující systém m rovnic o n neznámych:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m. \end{aligned}$$

Posloupnost $x_1, \dots, x_n$ lze chápat jako vektor proměnných, tj. sloupec v matici typu $n/1$, a podobně s hodnotami $y_1, \dots, y_n$.

Systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A \cdot x = y$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Systém rovnic lze pak formálně psát ve tvaru $A \cdot x = y$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Původní rovnice nyní obdržíme tak, že vždy bereme řádky z A a sčítáme součiny odpovídajících komponent, tj. $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$. Tím získáme i-tý prvek výsledného vektoru.
V rovině, tj. pro vektory dimenze 2, jsme už zavedli takovýto počet a viděli jsme, že s ním lze pracovat velice efektivně. Nyní budeme postupovat obecněji a zavedeme i na maticích operace násobení.

Součin matic

Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad $\mathbb{K}$ definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le q,$$

tj. prvek c_{ik} ve výsledné matici součinu dostaneme tak, že skalárně vynásobíme

$$(i\text{–tý řádek matice } A) \text{ a } (k\text{-tý sloupec matice } B).$$

Součin matic

Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad $\mathbb{K}$ definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \le i \le m,\ 1 \le k \le q,$$

tj. prvek c_{ik} ve výsledné matici součinu dostaneme tak, že skalárně vynásobíme

(i–tý řádek matice A) a (k-tý sloupec matice B).

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Součin matic

Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/q nad $\mathbb{K}$ definujeme jejich součin $C = A \cdot B = (c_{ik})$ jako matici typu m/q s prvky

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \text{ pro libovolné } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq k \leq q,$$

tj. prvek c_{ik} ve výsledné matici součinu dostaneme tak, že skalárně vynásobíme

(i–tý řádek matice A) a (k-tý sloupec matice B).

Příklad

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

V opačném pořadí nelze tyto dvě matice násobit!

Čtvercové matice

U matice typu n/n hovoříme o **čtvercové matici**. Počet řádků a sloupců se nazývá **dimenze matice**. Matici

$$E_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

se říká **jednotková matice** (symbol δ_{ij} je tzv. *Kroneckerovo* delta, které je rovno 1, pokud $i = j$, jinak je rovno 0).

Na množině čtvercových matic nad $\mathbb{K}$ dimenze n je součin matic definován pro každé dvě matice:

Věta

Pro libovolný okruh skalárů je na množině všech čtvercových matic dimenze n definována operace násobení. Splňuje vlastnosti (O1) (asociativita) a (O3) vzhledem k jednotkové matici $E = (\delta_{ij})$. *Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje (O4) (distributivita). Obecně však neplatí (O2) (komutativita) ani (OI) neexistence dělitelů nuly, zejména tedy neplatí (P) (existence inverzního prvku)*

Na množině čtvercových matic nad $\mathbb{K}$ dimenze n je součin matic definován pro každé dvě matice:

Věta

Pro libovolný okruh skalárů je na množině všech čtvercových matic dimenze n definována operace násobení. Splňuje vlastnosti (O1) (asociativita) a (O3) vzhledem k jednotkové matici $E = (\delta_{ij})$. Dále spolu se sčítáním matic vyhovuje (O4) (distributivita). Obecně však neplatí (O2) (komutativita) ani (OI) neexistence dělitelů nuly, zejména tedy neplatí (P) (existence inverzního prvku)

Při důkazu předchozího tvrzení není podstatný stejný počet řádků a sloupců, kromě samotné existence operace násobení pro všechny dvojice matice. Příslušné vlastnosti proto platí obecněji:

Věta

Násobení matic je asociativní a distributivní, tj. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, *kdykoliv jsou tato násobení definována. Jednotková matice je neutrálním prvkem pro násobení zleva i zprava.*

Trojúhelníkové matice

Speciálním případem čtvercové matice je matice **trojúhelníková**, která má buď pod hlavní diagonálou pouze nuly (tzv. **horní trojúhelníková matice**) nebo nad hlavní diagonálou pouze nuly (tzv. **dolní trojúhelníková matice**). Na hlavní diagonále mohou být prvky nenulové nebo i nulové.

Trojúhelníkové matice

Speciálním případem čtvercové matice je matice **trojúhelníková**, která má buď pod hlavní diagonálou pouze nuly (tzv. **horní trojúhelníková matice**) nebo nad hlavní diagonálou pouze nuly (tzv. **dolní trojúhelníková matice**). Na hlavní diagonále mohou být prvky nenulové nebo i nulové.

Příklad

Příklady horních trojúhelníkových matic jsou jednotková matice E_n nebo nulová matice 0 (obě řádu n) nebo např. matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Trojúhelníkové matice

Speciálním případem čtvercové matice je matice **trojúhelníková**, která má buď pod hlavní diagonálou pouze nuly (tzv. **horní trojúhelníková matice**) nebo nad hlavní diagonálou pouze nuly (tzv. **dolní trojúhelníková matice**). Na hlavní diagonále mohou být prvky nenulové nebo i nulové.

Příklad

Příklady horních trojúhelníkových matic jsou jednotková matice E_n nebo nulová matice 0 (obě řádu n) nebo např. matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ověřte si, že součin dvou (či více) horních trojúhelníkových matic (případně dolních trojúhelníkových matic) je opět horní trojúhelníková matice (případně dolní trojúhelníková matice).

Diagonální matice

Je-li matice A současně horní i dolní trojúhelníková, potom má mimo hlavní diagonálu pouze nuly. Taková matice se nazývá **diagonální**. Na hlavní diagonále mohou být prvky nenulové nebo i nulové. Tj. čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n je diagonální, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Diagonální matice

Je-li matice A současně horní i dolní trojúhelníková, potom má mimo hlavní diagonálu pouze nuly. Taková matice se nazývá **diagonální**. Na hlavní diagonále mohou být prvky nenulové nebo i nulové. Tj. čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n je diagonální, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Příklad

Příklady diagonálních matic jsou jednotková matice I nebo nulová matice 0 (obě řádu n) nebo např. matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonální matice

Je-li matice A současně horní i dolní trojúhelníková, potom má mimo hlavní diagonálu pouze nuly. Taková matice se nazývá **diagonální**. Na hlavní diagonále mohou být prvky nenulové nebo i nulové. Tj. čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n je diagonální, pokud $a_{ij} = 0$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Příklad

Příklady diagonálních matic jsou jednotková matice I nebo nulová matice 0 (obě řádu n) nebo např. matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ověřte si, že součin dvou (či více) diagonálních matic je opět diagonální matice.

Inverzní matice

Se skaláry umíme počítat tak, že z rovnosti $a \cdot x = b$ umíme vyjádřit $x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to chtěli umět s maticemi, máme ale problém, jak poznat, zda taková inverze existuje, a jak ji spočítat.

Inverzní matice

Se skaláry umíme počítat tak, že z rovnosti $a \cdot x = b$ umíme vyjádřit $x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to chtěli umět s maticemi, máme ale problém, jak poznat, zda taková inverze existuje, a jak ji spočítat.

Definice

Říkáme, že B je **matice inverzní** k matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$ a je samozřejmé, že obě matice musí mít tutéž dimenzi n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme **regulární (invertibilní) matice**.

Inverzní matice

Se skaláry umíme počítat tak, že z rovnosti $a \cdot x = b$ umíme vyjádřit $x = a^{-1} \cdot b$, kdykoliv inverze k a existuje. Podobně bychom to chtěli umět s maticemi, máme ale problém, jak poznat, zda taková inverze existuje, a jak ji spočítat.

Definice

Říkáme, že B je **matice inverzní** k matici A, když $A \cdot B = B \cdot A = E$. Píšeme pak $B = A^{-1}$ a je samozřejmé, že obě matice musí mít tutéž dimenzi n. Matici, k níž existuje matice inverzní, říkáme **regulární (invertibilní) matice**.

Pokud A^{-1} a B^{-1} existují, pak existuje i $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Je totiž (díky asociativitě násobení)
$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A.B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = E$ a
$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = E$.

Příklad

Matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nemá inverzi. Pokud by měla být nějaká matice

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

inverzní k matici A, potom by muselo platit

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

což nelze splnit pro libovolnou volbu čísel a, b, c, d.

Základní vlastnosti regulárních a singulárních matic jsou shrnuty v následujícím tvrzení.

Věta

Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n.

(i) *Je-li A regulární, je její inverze A^{-1} určena jednoznačně.*

(ii) *Je-li A regulární, pak je*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(iii) *Jsou-li A i B regulární, potom je také AB regulární a platí*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \quad \textit{(Pozor, pořadí u inverzí se vyměnilo!)}$$

Protože s maticemi umíme počítat obdobně jako se skaláry, jen mají složitější chování, můžeme formálně snadno řešit systémy lineárních rovnic: Jestliže vyjádříme soustavu n rovnic pro n neznámých součinem matic

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

a existuje matice inverzní k matici A, pak lze násobit zleva A^{-1} a dostaneme $A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$, tj. hledané řešení.

Protože s maticemi umíme počítat obdobně jako se skaláry, jen mají složitější chování, můžeme formálně snadno řešit systémy lineárních rovnic: Jestliže vyjádříme soustavu n rovnic pro n neznámých součinem matic

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

a existuje matice inverzní k matici A, pak lze násobit zleva A^{-1} a dostaneme $A^{-1} \cdot y = A^{-1} \cdot A \cdot x = E \cdot x = x$, tj. hledané řešení. Naopak rozepsáním podmínky $A \cdot A^{-1} = E$ pro neznámé skaláry v hledané matici A^{-1} dostaneme n systémů lineárních rovnic se stejnou maticí na levé straně a vektory napravo (postupně)

$$(1, 0, \ldots, 0)^T, (0, 1, 0, \ldots, 0)^T, \ldots, (0, \ldots, 0, 1)^T.$$

Později si ukážeme, jak lze jednoduše vypočitat matici A^{-1}. Pro začátek ale můžeme uvést vzorec pro výpočet inverze k matici typu 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

kde $\det A = ad - bc$ je determinant matice A. Ověřte přímým výpočtem, že jsou splněny definiční vztahy pro inverzi.
Je tedy vidět, že matice A řádu 2 je regulární $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ (a tedy A je singulární $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$.)

Transponovaná matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Matici $A^T := (a_{ji})$, nazýváme **transponovaná matice** k matici A.
Matice A^T vznikne tak, že řádky matice A napíšeme do sloupců (nebo sloupce matice A do řádků). Má tedy matice A^T typ $n \times m$.

Transponovaná matice

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Matici $A^T := (a_{ji})$, nazýváme **transponovaná matice** k matici A.
Matice A^T vznikne tak, že řádky matice A napíšeme do sloupců (nebo sloupce matice A do řádků). Má tedy matice A^T typ $n \times m$.

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

Tvrzení

Platí následující vztahy:

- $(A^T)^T = A, \quad (A+B)^T = A^T + B^T,$
- $(AB)^T = B^T A^T$ *(Pozor, pořadí u transponovaných matic se vyměnilo!),*
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Tvrzení

Platí následující vztahy:

- $(A^T)^T = A, \quad (A+B)^T = A^T + B^T,$
- $(AB)^T = B^T A^T$ *(Pozor, pořadí u transponovaných matic se vyměnilo!),*
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$

Důkaz.

Zkuste sami, jsou jednoduché. □

Plán přednášky

1 Vektory

2 Matice nad skaláry
- Lineární rovnice a jejich soustavy

3 Ekvivalentní úpravy matic

4 Lineární závislost

Z hlediska řešení systémů rovnic

$$A \cdot x = b$$

je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory b, které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Uvedeme si jednoduché manipulace s řádky rovnic a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému.

Z hlediska řešení systémů rovnic

$$A \cdot x = b$$

je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory b, které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Uvedeme si jednoduché manipulace s řádky rovnic a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému.

Takovým operacím říkáme **řádkové elementární transformace**. Jsou to:

- záměna dvou řádků
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
- přičtení řádku k jinému řádku.

Z hlediska řešení systémů rovnic

$$A \cdot x = b$$

je jistě přirozené považovat za ekvivalentní matice A a vektory b, které zadávají systémy rovnic se stejným řešením. Uvedeme si jednoduché manipulace s řádky rovnic a stejným způsobem pak můžeme upravovat i vektor napravo. Když se nám podaří vlevo dostat systém s jednotkovou maticí, bude napravo řešení původního systému.

Takovým operacím říkáme **řádkové elementární transformace**. Jsou to:

- záměna dvou řádků
- vynásobení vybraného řádku nenulovým skalárem
- přičtení řádku k jinému řádku.

Je zjevné, že odpovídající operace na úrovni rovnic v systému nemohou změnit množinu všech jeho řešení. Později bude vidět, že sloupcové transformace rovněž odpovídají řešení téhož systému, tentokrát ale v transformovaných souřadnicích.

Analogicky, **sloupcové elementární transformace** matic jsou

- záměna dvou sloupců
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
- přičtení sloupce k jinému sloupci,

ty však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné.

Analogicky, **sloupcové elementární transformace** matic jsou

- záměna dvou sloupců
- vynásobení vybraného sloupce nenulovým skalárem
- přičtení sloupce k jinému sloupci,

ty však nezachovávají řešení příslušných rovnic, protože mezi sebou míchají samotné proměnné.
Systematicky můžeme použít elementární řádkové úpravy k postupné eliminaci proměnných. Postup je algoritmický a většinou se mu říká **Gausova eliminační metoda** .

Příklad

Metodou Gaussovy eliminace vyřešte systém

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
-x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1, \\
4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2, \\
3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3.
\end{array}
$$

Věta

Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) **schodovitý tvar***:*

- *Je-li $a_{ij} = 0$ a všechny předchozí prvky na i-tém řádku jsou také nulové, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$*
- *je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-ním řádku, pak $a_{ij} = 0$.*

Věta

Nenulovou matici nad libovolným okruhem skalárů $\mathbb{K}$ lze konečně mnoha elementárními řádkovými transformacemi převést na tzv. (řádkově) **schodovitý tvar**:

- *Je-li $a_{ij} = 0$ a všechny předchozí prvky na i-tém řádku jsou také nulové, potom $a_{kj} = 0$ pro všechna $k \geq i$*
- *je-li $a_{(i-1)j}$ první nenulový prvek na $(i-1)$-ním řádku, pak $a_{ij} = 0$.*

Matice v řádkově schodovitém tvaru vypadá takto

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & \dots & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{lp} & \dots \\ \vdots & & & & & & & \end{pmatrix}$$

a matice může, ale nemusí, končit několika nulovými řádky.

K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

Úprava matice na schodovitý tvar

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.

K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

Úprava matice na schodovitý tvar

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots,$ vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.

K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

Úprava matice na schodovitý tvar

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots,$ vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

Úprava matice na schodovitý tvar

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \ldots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

K převodu libovolné matice můžeme použít jednoduchý algoritmus:

Úprava matice na schodovitý tvar

1. Záměnou řádků docílíme, že v prvním řádku bude v prvním nenulovém sloupci nenulový prvek, nechť je to j-tý sloupec.
2. Pro $i = 2, \dots$, vynásobením prvního řádku prvkem a_{ij}, i-tého řádku prvkem a_{1j} a odečtením vynulujeme prvek a_{ij} na i-tém řádku.
3. Opakovanou aplikací bodů (1) a (2), vždy pro zbytek řádků a sloupců v získané matici dospějeme po konečném počtu kroků k požadovanému tvaru.

Uvedený postup je obvyklá eliminace proměnných v systémech lineárních rovnic. Pro řešení systémů rovnic má ale uvedený postup rozumný smysl jen, když mezi skaláry neexistují dělitelé nuly. Pokud tvoří skaláry pole, pak můžeme navíc ze schodovitého tvaru snadno spočíst řešení (případně ověřit jeho neexistenci). Rozdíly jsou dobře vidět při porovnání třeba $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, případně $\mathbb{Z}_2$ nebo $\mathbb{Z}_3$.

Realizace pomocí elementárních matic

Všimněme si, že elementární **řádkové** (resp. sloupcové) transformace odpovídají vynásobením **zleva** (resp. zprava) následujícími maticemi:

- Přehození i-tého a j-tého řádku (resp. sloupce)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Realizace pomocí elementárních matic

- Vynásobení i-tého řádku (resp. sloupce) skalárem a:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Realizace pomocí elementárních matic

- Sečtení i-tého řádku (resp. sloupce) s j-tým:

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \to \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & & & \\ & & j & & & & \end{array}
\end{array}$$

Toto jednoduché pozorování je ve skutečnosti velice podstatné, protože součin invertibilních matic je invertibilní a všechny elementární transformace jsou nad polem skalárů invertibilní. Pro libovolnou matici A tedy dostaneme násobením vhodnou invertibilní maticí $P = P_k \cdots P_1$ zleva (postupné násobení k maticemi zleva) její ekvivalentní řádkový schodovitý tvar $A' = P \cdot A$.

Toto jednoduché pozorování je ve skutečnosti velice podstatné, protože součin invertibilních matic je invertibilní a všechny elementární transformace jsou nad polem skalárů invertibilní. Pro libovolnou matici A tedy dostaneme násobením vhodnou invertibilní maticí $P = P_k \cdots P_1$ zleva (postupné násobení k maticemi zleva) její ekvivalentní řádkový schodovitý tvar $A' = P \cdot A$.
Jestliže obecně aplikujeme tentýž eliminační postup na sloupce, dostaneme z každé matice B její sloucový schodovitý tvar B' vynásobením vhodnou invertibilní maticí $Q = Q_1 \cdots Q_\ell$. Pokud ale začneme s maticí $B = A'$ v řádkově schodovitém tvaru, eliminuje takový postup pouze všechny dosud nenulové prvky mimo diagonálu matice a závěrem lze ještě i tyto elementárními operacemi změnit na jedničky. Celkem jsme tedy ověřili důležitý výsledek, ke kterému se budeme mnohokrát vracet:

Věta

Pro každou matici A typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$ existují čtvercové invertibilní matice P dimenze m a Q dimenze n takové, že matice $P \cdot A$ je v řádkově schodovitém tvaru a

$$P \cdot A \cdot Q = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Algoritmus pro výpočet inverzní matice

V předchozích úvahách jsme se dostali prakticky k úplnému algoritmu pro výpočet inverzní matice. Během jednoduchého níže uvedeného postupu buď zjistíme, že inverze neexistuje, nebo bude inverze spočtena. I nadále pracujeme nad polem skalárů.

Algoritmus pro výpočet inverzní matice

V předchozích úvahách jsme se dostali prakticky k úplnému algoritmu pro výpočet inverzní matice. Během jednoduchého níže uvedeného postupu buď zjistíme, že inverze neexistuje, nebo bude inverze spočtena. I nadále pracujeme nad polem skalárů. Ekvivalentní řádkové transformace se čtvercovou maticí A dimenze n vedou k matici P' takové, že $P' \cdot A$ bude v řádkově schodovitém tvaru. Přitom může (ale nemusí) být jeden nebo více posledních řádků nulových. Jestliže má existovat inverzní matice k A, pak existuje i inverzní matice k $P' \cdot A$. Jestliže však je poslední řádek v $P \cdot A$ nulový, bude nulový i poslední řádek v $P \cdot A \cdot B$ pro jakoukoliv matici B dimenze n. Existence takového nulového řádku ve výsledku (řádkové) Gaussovy eliminace tedy vylučuje existenci A^{-1}.

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E.

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E.

Matice A je tedy ekvivalentní s jednotkovou maticí E, tj. existují elementární matice $P_1, \dots, P_k$ takové, že

$$P_k P_{k-1} \dots P_1 A = E.$$

Využijme asociativitu násobení matic a uzávorkujme tento vztah následovně:

$$(P_k P_{k-1} \dots P_1) \cdot A = E, \quad \text{neboli} \quad (P_k P_{k-1} \dots P_1) \cdot E = A^{-1}. \tag{1}$$

Předpokládejme nyní, že A^{-1} existuje. Podle předchozího nalezneme řádkově schodovitý tvar bez nulového řádku, tzn. že všechny diagonální prvky v $P' \cdot A$ jsou nenulové. Pak ovšem pokračováním eliminace od pravého dolního rohu zpět a vynormováním diagonálních prvků na jedničky získáme jednotkovou matici E.

Matice A je tedy ekvivalentní s jednotkovou maticí E, tj. existují elementární matice $P_1, \dots, P_k$ takové, že

$$P_k P_{k-1} \dots P_1 A = E.$$

Využijme asociativitu násobení matic a uzávorkujme tento vztah následovně:

$$(P_k P_{k-1} \dots P_1) \cdot A = E, \quad \text{neboli} \quad (P_k P_{k-1} \dots P_1) \cdot E = A^{-1}. \tag{1}$$

Potom lze snadno vidět, že pro matici

$$B := P_k P_{k-1} \dots P_1 \quad \text{platí} \quad B \cdot A = E \quad \text{neboli} \quad B = A^{-1}.$$

Našli jsme tedy inverzní matici A^{-1} k matici A. Zbývá jen přečíst, jak se výše uvedená matice $B = A^{-1}$ zkonstruuje.
Prakticky tedy můžeme postupovat tak, že vedle sebe napíšeme původní matici A a jednotkovou matici E, matici A upravujeme řádkovými elementárními úpravami nejprve na schodovitý tvar, potom tzv. zpětnou eliminací na diagonální matici a v té násobíme řádky inverzními prvky z $\mathbb{K}$. Tytéž úpravy postupně prováděné s E vedou právě k matici B z předchozích úvah, tedy z ní získáme právě hledanou inverzi. Pokud tento algoritmus narazí na vynulování celého řádku v původní matici, znamená to, že inverzní matice neexistuje.

Plán přednášky

1 Vektory

2 Matice nad skaláry
- Lineární rovnice a jejich soustavy

3 Ekvivalentní úpravy matic

4 Lineární závislost

Lineární závislost

V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme **lineární kombinace**. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme později, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1 u_{i_1} + \cdots + a_k u_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A.

Lineární závislost

V předchozích úvahách a počtech s maticemi jsme stále pracovali se sčítáním řádků nebo sloupců coby vektorů, spolu s jejich násobením skaláry. Takové operaci říkáme **lineární kombinace**. V abstraktním pojetí se k operacím s vektory vrátíme později, bude ale užitečné pochopit podstatu už nyní. Lineární kombinací řádků (nebo sloupců) matice $A = (a_{ij})$ typu m/n rozumíme výraz $a_1 u_{i_1} + \cdots + a_k u_{i_k}$, kde a_i jsou skaláry, $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$ jsou řádky (nebo $u_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$ jsou sloupce) matice A.
Jestliže existuje lineární kombinace daných řádků s alespoň jedním nenulovým skalárním koeficientem, jejímž výsledkem je nulový řádek, říkáme, že jsou **lineárně závislé**. V opačném případě, tj. když jedinou možnost jak získat nulový řádek je vynásobení výhradně nulovými skaláry, jsou **lineárně nezávislé**. Obdobně definujeme lineárně závislé a nezávislé sloupce matice.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových schodů v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových schodů v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Věta

Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Matice A má stejný počet $h(A)$ linárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména hodnost nepřevýší menší z rozměrů matice A.

Předchozí výsledky o Gausově eliminaci můžeme vnímat takovým způsobem, že počet výsledných nenulových schodů v řádkově nebo sloupcově schodovitém tvaru je vždy roven témuž přirozenému číslu a to počtu lineárně nezávislých řádků matice a témuž počtu lineárně nezávislých sloupců matice. Tomuto číslu říkáme **hodnost matice**, značíme $h(A)$. Zapamatujme si výsledné tvrzení:

Věta

Nechť A je matice typu m/n nad polem skalárů $\mathbb{K}$. Matice A má stejný počet $h(A)$ linárně nezávislých řádků a lineárně nezávislých sloupců. Zejména hodnost nepřevýší menší z rozměrů matice A.

Algoritmus pro výpočet inverzních matic také říká, že čtvercová matice A dimenze m má inverzi právě, když je její hodnost rovna počtu řádků m.

Soustavy lineárních rovnic

Pomocí hodnosti **matice systému** $h(A)$ a hodnosti **rozšířené matice systému** $h(A|b)$ lze jednoduše testovat řešitelnost systému lineárních rovnic s maticí A typu $m \times n$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{R}^m$. Zřejmě je vždy $h(A) \leq h(A|b)$, protože přidání sloupce b může hodnost matice případně jenom zvýšit. Otázka je, kdy přidání sloupce b skutečně zvýší hodnost matice systému a kdy nikoliv.

Soustavy lineárních rovnic

Pomocí hodnosti **matice systému** $h(A)$ a hodnosti **rozšířené matice systému** $h(A|b)$ lze jednoduše testovat řešitelnost systému lineárních rovnic s maticí A typu $m \times n$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{R}^m$. Zřejmě je vždy $h(A) \leq h(A|b)$, protože přidání sloupce b může hodnost matice případně jenom zvýšit. Otázka je, kdy přidání sloupce b skutečně zvýší hodnost matice systému a kdy nikoliv.

Věta (Frobeniova)

Systém lineárních rovnic má (alespoň jedno) řešení

$$\Leftrightarrow \quad h(A) = h(A|b).$$

Soustavy lineárních rovnic

Pomocí hodnosti **matice systému** $h(A)$ a hodnosti **rozšířené matice systému** $h(A|b)$ lze jednoduše testovat řešitelnost systému lineárních rovnic s maticí A typu $m \times n$ a vektorem pravých stran $b \in \mathbb{R}^m$. Zřejmě je vždy $h(A) \leq h(A|b)$, protože přidání sloupce b může hodnost matice případně jenom zvýšit. Otázka je, kdy přidání sloupce b skutečně zvýší hodnost matice systému a kdy nikoliv.

Věta (Frobeniova)

Systém lineárních rovnic má (alespoň jedno) řešení

$$\Leftrightarrow \quad h(A) = h(A|b).$$

Důkaz.

$h(A) = h(A|b)$, právě když je vektor b lineární kombinací sloupců matice A. Neboli existují čísla $x_1, \ldots, x_n$ tak, že platí $(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})^T \cdot x_1 + (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})^T \cdot x_2 + \cdots + (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})^T x_n = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$. $\square$

Lineární nezávislost sloupců matice

Regulární a singulární matice umožňují jednoduše charakterizovat lineární nezávislost a závislost n vektorů $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$. Mají-li být vektory $u_1, \ldots, u_n$ lineárně nezávislé, musí mít lineární systém

$$a_1\, u_1 + a_2\, u_2 + \cdots + a_n\, u_n = 0$$

pouze triviální řešení $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$. To nastane právě tehdy, když je čtvercová matice

$$U := \begin{pmatrix} u_1^T & \ldots & u_n^T \end{pmatrix},$$

jejíž sloupce jsou právě vektory $u_1, \ldots, u_n$, regulární.

Tvrzení

Nechť jsou dány vektory $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory $u_1, \dots, u_n$. Potom

$$\begin{aligned} u_1, \dots, u_n \text{ jsou lineárně nezávislé} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{matice } U \text{ je regulární},\\ u_1, \dots, u_n \text{ jsou lineárně závislé} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{matice } U \text{ je singulární}. \end{aligned}$$

Tvrzení

Nechť jsou dány vektory $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory $u_1, \ldots, u_n$. Potom

$$\begin{array}{lcl} u_1, \ldots, u_n \text{ jsou lineárně nezávislé} & \Leftrightarrow & \text{matice } U \text{ je regulární}, \\ u_1, \ldots, u_n \text{ jsou lineárně závislé} & \Leftrightarrow & \text{matice } U \text{ je singulární}. \end{array}$$

Příklad

Rozhodněte o lineární (ne)závislosti vektorů
$u_1 = (1,2,1)^T, u_2 = (-2,1,1)^T, u_3 = (0,5,3)^T$.