Matematika I – 6. přednáška
Matice a determinanty

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

26. 3. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

V rovině $\mathbb{R}^2$ jsme pracovali s maticemi lineárních zobrazení a **determinant** matice A

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

prozrazoval, jestli umíme najít inverzi k A. Pokud je totiž determinant nenulový, pak $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Determinant byl užitečný i jinak: obsah rovnoběžníka by měl být lineárně závislý na každém ze dvou vektorů definujících rovnoběžník a je užitečné zároveň požadovat změnu znaménka při změně pořadí těchto vektorů. Protože tyto vlastnosti měl, až na pevný skalární násobek, jedině determinant, odvodili jsme, že je obsah dán právě takto.

Nyní budeme takové číslo $\det A \in \mathbb{R}$ definovat pro libovolnou čtvercovou matici řádu n a ukážeme, že má právě ty vlastnosti, které jsme potřebovali výše.

Budeme pracovat s libovolnými skaláry $\mathbb{K}$ a maticemi nad těmito skaláry (např. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_k$).
Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny X na sebe se nazývá **permutace množiny** X. Je-li $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, lze permutace zapsat pomocí výsledného pořadí ve formě tabulky:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Prvek $x \in X$ se nazývá **samodružným (pevným) bodem permutace** σ, je-li $\sigma(x) = x$.
Permutace σ taková, že existují právě dva různé prvky $x, y \in X$ splňující $\sigma(x) = y, \sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro všechna ostatní $z \in X$ se nazývá **transpozice**, značíme ji (x, y).

V dimenzi dva byl vzorec pro determinant jednoduchý – vezmeme všechny možné součiny dvou prvků (kdy beereme po jednom z každého sloupce a řádku matice), opatříme je znaménkem tak, aby při přehození dvou sloupců došlo ke změně celkového znaménka a tyto výrazy sečteme:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \ \det A = ad - bc.$$

Obecně, nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad $\mathbb{K}$.

Definice

Determinant matice A je skalár (číslo) $\det A = |A|$ definovaný vztahem

$$|A| = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

kde Σ_n je množina všech možných permutací na $\{1, \ldots, n\}$.

Každý z výrazů $\operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ nazýváme **člen determinantu** $|A|$, znaménko sgn popíšeme později.

Jednoduché příklady už známe: je-li $n = 1$, pak $|a_{11}| = a_{11} \in \mathbb{K}$ (neplést s absolutní hodnotou!), a pro $n = 2$ je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Podobně pro $n = 3$ se dá uhodnout (chceme linearitu v každém sloupci a antisymetrii)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Tomuto vzorci se říká **Sarrusovo pravidlo**.

Parita permutace

Jak tedy najít správná znaménka? Říkáme, že dvojice prvků $a, b \in X = \{1, \dots, n\}$ tvoří **inverzi v permutaci** σ, je-li $a < b$ a $\sigma(a) > \sigma(b)$. Permutace σ se nazývá **sudá** (resp. **lichá**), obsahuje-li sudý (resp. lichý) počet inverzí.
Parita permutace σ je $(-1)^{\text{počet inverzí}}$ a značíme ji právě $\operatorname{sgn}(\sigma)$.
Tolik definice, chceme ale vědět, jak s paritou počítat.
Z následujícího tvrzení už je jasně vidět, že Sarrusovo pravidlo skutečně počítá determinant v dimenzi 3.

Věta

Na množině $X = \{1, 2, \dots, n\}$ je právě $n!$ různých permutací. Tyto lze seřadit do posloupnosti tak, že každé dvě po sobě jdoucí se liší právě jednou transpozicí. Lze při tom začít libovolnou permutací a každá transpozice mění paritu.

Zjistili jsme, že provedení libovolné transpozice změní paritu permutace a že každé pořadí čísel $\{1, 2, \dots, n\}$ lze získat postupnými transpozicemi sousedních prvků. Důsledkem tohoto popisu je, že na každé množině $X = \{1, \dots, n\}$, $n > 1$, je právě $\frac{1}{2}n!$ sudých a $\frac{1}{2}n!$ lichých permutací.
Jestliže složíme dvě permutace za sebou, znamená to provést napřed všechny transpozice tvořící první a pak druhou. Proto pro libovolné permutace $\sigma, \eta : X \to X$ platí

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \eta) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\eta), \quad \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Příklad

Napište permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

jako složení transpozic a určete její paritu.

Základní vlastnosti determinantu

Věta

Pro každou čtvercovou matici A platí

1. $|A^T| = |A|$,
2. *Je-li jeden řádek v A tvořen nulovými prvky z $\mathbb{K}$, pak* $|A| = 0$,
3. *Jestliže matice B vznikla z A výměnou dvou řádků, pak* $|A| = -|B|$,
4. *Jestliže matice B vznikla z A vynásobením řádku skalárem* $a \in \mathbb{K}$, *pak* $|B| = a|A|$,
5. *Jsou-li prvky k-tého řádku v A tvaru $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ a všechny ostatní řádky v maticích A, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$ jsou stejné, pak* $|A| = |B| + |C|$,
6. *Determinant $|A|$ se nezmění, přičteme-li k libovolnému řádku A lineární kombinaci ostatních řádků.*

Důsledkem prvního tvrzení předchozí věty o rovnosti determinantů matice a matice transponované je, že kdykoliv se nám podaří dokázat nějaké tvrzení o determinantech formulované s využitím řádků příslušné matice, pak analogické tvrzení platí i pro sloupce. Např. tedy můžeme okamžitě všechna tvrzení (2)–(6) této věty přeformulovat jako tvrzení o sloupcích matice.
Vlastnosti (3)–(5) říkají, že determinant jako zobrazení, které n vektorům dimenze n (řádkům nebo sloupcům matice) přiřadí skalár je antisymetrické zobrazení lineární v každém svém argumentu, přesně jak jsme podle analogie z dimenze 2 požadovali.

Výpočet determinantu úpravou na schodovitý tvar

Pro matici v řádkovém nebo sloupcovém schodovitém tvaru je jediným nenulovým členem determinantu ten, který odpovídá identické permutaci. Vidíme tedy, že determinant takové matice je $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$. Předchozí věta tedy poskytuje velice efektivní metodu výpočtu determinantů pomocí Gaussovy eliminační metody.

Věta (Cauchyova)

Nechť $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *jsou čtvercové matice dimenze* n *nad okruhem skalárů* $\mathbb{K}$. *Pak* $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Časem uvidíme, že skutečně stejně jako v dimenzi dva je determinant matice roven orientovanému objemu rovnoběžnostěnu určeného jejími sloupci. Uvidíme také, že když uvážíme zobrazení $x \mapsto A \cdot x$ zadané čtvercovou maticí A na $\mathbb{R}^n$, pak můžeme determinant této matice vidět jako vyjádření poměru mezi objemem rovnoběžnostěnů daných vektory $x_1, \dots x_n$ a jejich obrazy $A \cdot x_1, \dots, A \cdot x_n$. Protože skládání zobrazení $x \mapsto A \cdot x \mapsto B \cdot (A \cdot x)$ odpovídá násobení matic, je **Cauchyova věta** docela pochopitelná. My tuto větu odvodíme ryze algebraicky jako důsledek tzv. Laplaceovy věty o rozvoji. Ta bude vyžadovat zavedení několika nových pojmů.

Definice (Minory a algebraické doplňky matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n a $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq n$ jsou pevně zvolená přirozená čísla. Pak matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_\ell} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_\ell} \end{pmatrix}$$

typu k/ℓ nazýváme **submaticí matice** A určenou řádky $i_1, \ldots, i_k$ a sloupci $j_1, \ldots, j_\ell$.
Zbývajícími $(m-k)$ řádky a $(n-l)$ sloupci je určena matice M^* typu $(m-k)/(n-\ell)$, která se nazývá **doplňková submatice** k M v A. Při $k = \ell$ je definován $|M|$, který nazýváme **subdeterminant** nebo **minor** řádu k matice A.

Definice (Minory a algebraické doplňky matice - pokračování)

Je-li $m = n$, pak při $k = \ell$ je i M^* čtvercová a $|M^*|$ se nazývá doplněk minoru $|M|$, nebo doplňkový minor k submatici M v matici A. Skalár

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M^*|$$

se nazývá **algebraický doplněk** k minoru $|M|$. Submatice tvořené prvními k řádky a sloupci se nazývají **hlavní submatice**, jejich determinanty **hlavní minory** matice A.
Při speciální volbě $k = \ell = 1,\ m = n$ hovoříme o **algebraickém doplňku** A_{ij} prvku a_{ij} matice A.

Lemma

Nechť A je čtvercová matice dimenze n a $|M|$ je její minor řádu $k < n$. Pak součin libovolného členu $|M|$ s libovolným členem jeho algebraického doplňku je členem $|A|$.

Toto tvrzení už předjímá, že by se pomocí takových součinů menších determinantů skutečně mohl determinant matic vyjadřovat. Víme, že $|A|$ obsahuje právě $n!$ různých členů, právě jeden pro každou permutaci.
Uvažované součiny $|M| \cdot |M^*|$ obsahují právě $\binom{n}{k} k!(n-k)! = n!$ různých členů z $|A|$, přitom pro různé výběry M dostáváme různé členy, a proto takto musí být vyjádřen právě $\det A$.

Tím jsme naznačili důkaz věty:

Věta (Laplaceova)

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice dimenze n nad libovolným okruhem skalárů a nechť je pevně zvoleno k jejích řádků. Pak $|A|$ je součet všech $\binom{n}{k}$ součinů $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_l} \cdot |M| \cdot |M^*|$ minorů řádu k vybraných ze zvolených řádků, s jejich algebraickými doplňky.

Laplaceův rozvoj determinantu

Laplaceova věta převádí výpočet $|A|$ na výpočet determinantů nižšího stupně. Této metodě výpočtu se říká **Laplaceův rozvoj** podle zvolených řádků či sloupců. Např. rozvoj podle i-tého řádku nebo i-tého sloupce:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}$$

kde A_{ij} označuje algebraický doplněk k prvku (minoru stupně 1) a_{ij}. Při praktickém počítání determinantů bývá výhodné kombinovat Laplaceův rozvoj s přímou metodou přičítání lineárních kombinací řádků či sloupců.

Důkaz Cauchyovy věty $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Uvažme matici H dimenze $2n$ (používáme tzv. blokovou symboliku, tj. píšeme matici jakoby složenou z matic)

$$H = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix} =$$

Laplaceovým rozvojem podle prvních n řádků obdržíme

$$|H| = |A| \cdot |B|.$$

Důkaz Cauchyovy věty $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

Nyní budeme k posledním n sloupcům H postupně přičítat lineární kombinace prvních n sloupců tak, abychom obdrželi matici s nulami v pravém dolním rohu. Dostaneme

$$K = \begin{pmatrix} A & A \cdot B \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme tedy

$$|H| = |K| = (-1)^n \cdot (-1)^{1+\cdots+2n} |A \cdot B| = (-1)^{2n \cdot (n+1)} \cdot |A \cdot B| = |A \cdot B|.$$

Jiný výpočet inverzní matice

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A, tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.
Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A (všimněte si transponování!). Nazýváme ji **adjungovaná matice** k matici A.

Věta

Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ platí

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

1. *A^{-1} existuje jako matice nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ právě, když $|A|^{-1}$ existuje v $\mathbb{K}$.*
2. *Pokud existuje A^{-1}, pak platí $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.*

Důkaz.

Jak jsme již zmínili, Cauchyova věta ukazuje, že z existence A^{-1} vyplývá invertibilita $|A| \in \mathbb{K}$. Předpokládejme naopak, že $|A|$ je invertibilní skalár. Spočteme přímým výpočtem $A \cdot A^* = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Pokud $i = j$ je to právě Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i-tého řádku. Pokud $i \neq j$ jde o rozvoj determinantu matice v níž je i-tý a j-tý řádek stejný a proto je $c_{ij} = 0$. Odtud plyne $A \cdot A^* = |A| \cdot E$, a tedy i $A^* \cdot A = |A| \cdot E$. □

Příklad

Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

a tedy

$$A^{-1} = -A^* = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Důsledky předchozích tvrzení

Důsledek

1. *A je singulární* $\Leftrightarrow \quad |A| = 0.$
2. *Nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory* $u_1^T, \ldots, u_n^T$. *Pak vektory* $u_1, \ldots, u_n$ *jsou lineárně závislé* $\Leftrightarrow \quad |U| = 0.$

Věta (Cramerovo pravidlo)

Nechť A je regulární matice řádu n a $b \in \mathbb{R}^n$ *a uvažujme systém lineárních rovnic* $Ax = b$. *Označme jako* A_i *matici, kterou získáme z matice A záměnou jejího i–tého sloupce za sloupec pravých stran b. Potom (jediné) řešení* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *tohoto systému je dáno vztahem*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Důkaz.

Zřejmě je $x = A^{-1}b$ jediným řešením tohoto systému. Podle vzorce pro výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované je

$$x = \frac{1}{|A|} A^* \, b,$$

neboli (s využitím Laplaceova rozvoje)

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|} \cdot (i\text{–tý prvek (sloupcového) vektoru } A^* \, b) \\ &= \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}) \\ &= \frac{|A_i|}{|A|}. \end{aligned}$$

$\square$

Poznámka

Cramerovo pravidlo je výhodné použít pro systémy s malým n (řekněme $n \leq 3$) nebo pro systémy, kde je v matici systému hodně nul.

Příklad

Vyřešte následující systém Cramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -3, \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -28,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} \boxed{2} & 2 & 3 \\ \boxed{-3} & -3 & -1 \\ \boxed{-3} & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -28 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-28}{-28} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & \boxed{-3} & -1 \\ -3 & \boxed{-3} & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -56 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-56}{-28} = 2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{2} \\ 2 & -3 & \boxed{-3} \\ -3 & 1 & \boxed{-3} \end{vmatrix} = \cdots = 28 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{28}{-28} = -1.$$