Matematika I – 7. přednáška
Vektorové prostory

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

2. 4. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

Připomenutí z minula

- determinant – definice a jeho základní vlastnosti
- Cauchyova věta $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- Laplaceův rozvoj determinantu

Jiný výpočet inverzní matice

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A, tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.

Připomenutí z minula

- determinant – definice a jeho základní vlastnosti
- Cauchyova věta $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
- Laplaceův rozvoj determinantu

Jiný výpočet inverzní matice

Předpokládejme nejprve, že existuje matice inverzní k matici A, tj. $A \cdot A^{-1} = E$. Protože pro jednotkovou matici platí vždy $|E| = 1$, je pro každou invertibilní matici vždy $|A|$ invertibilní skalár a platí $|A|^{-1} = |A^{-1}|$.
Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ dimenze n definujeme matici $A^* = (a^*_{ij})$, kde $a^*_{ij} = A_{ji}$ jsou algebraické doplňky k prvkům a_{ji} v A (všimněte si transponování!). Nazýváme ji **adjungovaná matice** k matici A.

Věta

Pro každou čtvercovou matici A nad okruhem skalárů $\mathbb{K}$ platí

$$AA^* = A^*A = |A| \cdot E.$$

Zejména tedy

1. A^{-1} *existuje jako matice nad okruhem skalárů* $\mathbb{K}$ *právě, když* $|A|^{-1}$ *existuje v* $\mathbb{K}$.
2. *Pokud existuje* A^{-1}, *pak platí* $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$.

Důkaz.

Jak jsme již zmínili, Cauchyova věta ukazuje, že z existence A^{-1} vyplývá invertibilita $|A| \in \mathbb{K}$. Předpokládejme naopak, že $|A|$ je invertibilní skalár. Spočteme přímým výpočtem $A \cdot A^* = (c_{ij})$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a^*_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}.$$

Pokud $i = j$ je to právě Laplaceův rozvoj $|A|$ podle i-tého řádku. Pokud $i \neq j$ jde o rozvoj determinantu matice v níž je i-tý a j-tý řádek stejný a proto je $c_{ij} = 0$. Odtud plyne $A \cdot A^* = |A| \cdot E$, a tedy i $A^* \cdot A = |A| \cdot E$. □

Příklad

Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vypočtěte inverzní matici k

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

a tedy

$$A^{-1} = -A^* = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 6 \\ -2 & 3 & -2 \\ -4 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Důsledky předchozích tvrzení

Důsledek

1. *A je singulární* $\Leftrightarrow \quad |A| = 0.$
2. *Nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory $u_1^T, \ldots, u_n^T$. Pak vektory $u_1, \ldots, u_n$ jsou lineárně závislé* $\Leftrightarrow \quad |U| = 0.$

Důsledky předchozích tvrzení

Důsledek

1. *A je singulární* $\Leftrightarrow \quad |A| = 0.$
2. *Nechť U je matice, jejíž sloupce jsou vektory* $u_1^T, \dots, u_n^T$. *Pak vektory* $u_1, \dots, u_n$ *jsou lineárně závislé* $\Leftrightarrow \quad |U| = 0.$

Věta (Cramerovo pravidlo)

Nechť A je regulární matice řádu n a $b \in \mathbb{R}^n$ *a uvažujme systém lineárních rovnic* $Ax = b$. *Označme jako* A_i *matici, kterou získáme z matice A záměnou jejího i–tého sloupce za sloupec pravých stran b. Potom (jediné) řešení* $x = (x_1, \dots, x_n)$ *tohoto systému je dáno vztahem*

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz.

Zřejmě je $x = A^{-1}b$ jediným řešením tohoto systému. Podle vzorce pro výpočet inverzní matice pomocí matice adjungované je

$$x = \frac{1}{|A|} A^* \, b,$$

neboli (s využitím Laplaceova rozvoje)

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|} \cdot (i\text{–tý prvek (sloupcového) vektoru } A^* \, b) \\ &= \frac{1}{|A|} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}) \\ &= \frac{|A_i|}{|A|}. \end{aligned}$$

$\square$

Poznámka

Cramerovo pravidlo je výhodné použít pro systémy s malým n (řekněme $n \leq 3$) nebo pro systémy, kde je v matici systému hodně nul.

Příklad

Vyřešte následující systém Cramerovým pravidlem:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2, \\ 2x_1 & - & 3x_2 & - & x_3 & = & -3, \\ -3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -3. \end{array}$$

Řešení

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -28,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -28 \quad \Rightarrow x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-28}{-28} = 1,$$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = -56 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{-56}{-28} = 2,$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = 28 \quad \Rightarrow x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{28}{-28} = -1.$$

Plán přednášky

Uvažujme systém m lineárních rovnic pro n proměnných a předpokládejme, že jde o rovnice tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme systém m lineárních rovnic pro n proměnných a předpokládejme, že jde o rovnice tvaru $A \cdot x = 0$, tj.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Díky vlastnosti distributivity pro násobení matic je okamžitě zřejmé, že součet dvou řešení $x = (x_1, \dots, x_n)$ a $y = (y_1, \dots, y_n)$ splňuje

$$A \cdot (x + y) = A \cdot x + A \cdot y = 0$$

a je tedy také řešením. Stejně tak zůstává řešením i skalární násobek $a \cdot x$.

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$.

Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a dimenze tohoto prostoru určitě nebude n (pokud matice systému není nulová).

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$.

Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a dimenze tohoto prostoru určitě nebude n (pokud matice systému není nulová).

Případ dvou rovnic pro dvě neznámé jsme potkali při řešení geometrických problémů v rovině a pro dvě závislé rovnice byl množinou všech řešení jednorozměrný prostor – přímka. U dvou nezávislých rovnic to byl průsečík dvou přímek, tj. *nularozměrný* prostor.

Množina všech řešení pevně zvoleného systému rovnic s nulovou pravou stranou je proto uzavřená na sčítání vektorů a násobení vektorů skaláry. To byly základní vlastnosti vektorů dimenze n v $\mathbb{K}^n$.

Teď ale máme vektory v prostoru řešení s n souřadnicemi a dimenze tohoto prostoru určitě nebude n (pokud matice systému není nulová).

Případ dvou rovnic pro dvě neznámé jsme potkali při řešení geometrických problémů v rovině a pro dvě závislé rovnice byl množinou všech řešení jednorozměrný prostor – přímka. U dvou nezávislých rovnic to byl průsečík dvou přímek, tj. *nularozměrný* prostor.

Potřebujeme proto obecnější definici vektorového prostoru a jeho dimenze.

Definice

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou platí axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$

$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$

$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$

$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Definice

Vektorový prostor V nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je množina s operací sčítání, pro kterou platí axiomy komutativní grupy, a násobení skaláry takové, že platí

$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \tag{V1}$$
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \tag{V2}$$
$$a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v \tag{V3}$$
$$1 \cdot v = v \tag{V4}$$

Příklad

Množina

$$W := \{(2, x),\ x \in \mathbb{R}\}$$

s obvyklými operacemi sčítání a násobení po složkách, tj. $(2, x_1) + (2, x_2) = (\,4,\ x_1 + x_2) \notin W$, $a \cdot (2, x) = (\,2a,\ ax) \notin W$ **není** vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi

   je vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi
   - $+$ …sčítání funkcí, tj. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, a

   je vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi

   $+$ …sčítání funkcí, tj. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, a

   $\cdot$ …násobení funkce reálným číslem, tj. $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$,

   je vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi

   $+$ …sčítání funkcí, tj. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, a
   $\cdot$ …násobení funkce reálným číslem, tj. $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$,

   je vektorový prostor.
3. Množina $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel s operacemi

   je vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi

   $+$ …sčítání funkcí, tj. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, a

   $\cdot$ …násobení funkce reálným číslem, tj. $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$,

   je vektorový prostor.
3. Množina $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel s operacemi

   $\oplus$ …sčítání, pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ definujme $x \oplus y := xy$, a

   je vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi

   $+$ …sčítání funkcí, tj. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, a

   $\cdot$ …násobení funkce reálným číslem, tj. $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$,

   je vektorový prostor.
3. Množina $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel s operacemi

   $\oplus$ …sčítání, pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ definujme $x \oplus y := xy$, a

   $\odot$ …násobení skalárem, pro $x \in \mathbb{R}^+$ a $a \in \mathbb{R}$ definujme $a \odot x := x^a$,

   je vektorový prostor.

Příklad

1. Množina $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ všech matic typu $m \times n$ s operacemi sčítání matic a násobení matice reálným číslem je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.
2. Množina $\mathcal{F}$ všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s operacemi
   - $+$ . . . sčítání funkcí, tj. $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, a
   - $\cdot$ . . . násobení funkce reálným číslem, tj. $(a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$,

   je vektorový prostor.
3. Množina $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel s operacemi
   - $\oplus$ . . . sčítání, pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ definujme $x \oplus y := xy$, a
   - $\odot$ . . . násobení skalárem, pro $x \in \mathbb{R}^+$ a $a \in \mathbb{R}$ definujme $a \odot x := x^a$,

   je vektorový prostor.
4. Množina $\mathbb{C}$ komplexních čísel s obvyklými operacemi sčítání a násobení je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad

1. Množina W všech polynomů **sudého stupně** s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem

Příklad

1. Množina W všech polynomů **sudého stupně** s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem **není** vektorový prostor. Není splněna podmínka uzavřenosti množiny W na operaci $+$ Např. pro polynomy $p(x) = x^4 + x^3 + x^2$ a $q(x) = -x^4 + 1$, pro které je $p, q \in W$, platí $(p+q)(x) = x^3 + x^2 + 1 \notin W$ (není sudého stupně).

Příklad

1. Množina W všech polynomů **sudého stupně** s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem **není** vektorový prostor. Není splněna podmínka uzavřenosti množiny W na operaci $+$ Např. pro polynomy $p(x) = x^4 + x^3 + x^2$ a $q(x) = -x^4 + 1$, pro které je $p, q \in W$, platí $(p+q)(x) = x^3 + x^2 + 1 \notin W$ (není sudého stupně).
2. Množina Gl_n všech (čtvercových) regulárních matic řádu n s operacemi
   - $\oplus$ …*sčítání*, definované pro $A, B \in \mathrm{GL}_n$ jako $A \oplus B := AB$, a
   - $\odot$ …násobení matice skalárem, tj. pro $A \in \mathrm{GL}_n$ a $a \in \mathbb{R}$ je $a \odot A := a \cdot A$,

Příklad

1. Množina W všech polynomů **sudého stupně** s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem **není** vektorový prostor. Není splněna podmínka uzavřenosti množiny W na operaci $+$ Např. pro polynomy $p(x) = x^4 + x^3 + x^2$ a $q(x) = -x^4 + 1$, pro které je $p, q \in W$, platí $(p+q)(x) = x^3 + x^2 + 1 \notin W$ (není sudého stupně).
2. Množina Gl_n všech (čtvercových) regulárních matic řádu n s operacemi
   - $\oplus$ ... *sčítání*, definované pro $A, B \in \mathrm{GL}_n$ jako $A \oplus B := AB$, a
   - $\odot$ ... násobení matice skalárem, tj. pro $A \in \mathrm{GL}_n$ a $a \in \mathbb{R}$ je $a \odot A := a \cdot A$,

   není vektorový prostor. Není např. splněna podmínka komutativity operace $\oplus$. Prozkoumejte, které axiomy splněny jsou! Zejména si všimněte, že pro $A, B \in \mathrm{GL}_n$ je také $A \oplus B = AB \in \mathrm{GL}_n$, oproti tomu pro $A \in \mathrm{GL}_n$ a $a \in \mathbb{R}$ je $a \cdot A \in \mathrm{GL}_n$ pouze pokud $a \neq 0$.

Věta

Nechť V je vektorový prostor nad polem skalárů $\mathbb{K}$, dále uvažme $a, b, a_i \in \mathbb{K}$, vektory $u, v, u_j \in V$. Potom

1. $a \cdot u = 0$ *právě když* $a = 0$ *nebo* $u = 0$
2. $(-1) \cdot u = -u$
3. $a \cdot (u - v) = a \cdot u - a \cdot v$
4. $(a - b) \cdot u = a \cdot u - b \cdot u$
5. $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} u_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \cdot u_j$.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subseteq V$.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subseteq V$.

Definice

Množina vektorů $M \subseteq V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subseteq V$.

Definice

Množina vektorů $M \subseteq V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá.

U matic jsme pracovali s tzv. lineárními kombinacemi řádků matice. S obecnými vektory budeme zacházet zcela analogicky: Výrazy tvaru $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k$ nazýváme *lineární kombinace* vektorů $v_1, \ldots, v_k \subseteq V$.

Definice

Množina vektorů $M \subseteq V$ ve vektorovém prostoru V nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineárně nezávislá* jestliže pro každou k-tici vektorů $v_1, \ldots, v_k \in M$ a každé skaláry $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

$$a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_k \cdot v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Posloupnost vektorů $v_1, \ldots, v_k$ nazveme *lineárně nezávislou* jestliže $v_1, \ldots, v_k$ jsou po dvou různé a $\{v_1, \ldots, v_k\}$ je lineárně nezávislá. Množina M vektorů je *lineárně závislá*, jestliže není lineárně nezávislá.

Lineární závislost a nezávislost

Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.

Lineární závislost a nezávislost

Přímo z definice pak vyplývá, že neprázdná podmnožina M vektorů ve vektorovém prostoru nad polem skalárů $\mathbb{K}$ je závislá právě, když je jeden z jejích vektorů vyjádřitelný jako lineární kombinace ostatních.
Přímo z definic plyne, že každá podmnožina lineárně nezávislé množiny M je lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že $M \subseteq V$ je lineárně nezávislá právě tehdy, když každá konečná podmnožina v M je lineárně nezávislá.

Plán přednášky

Definice

Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá **vektorovým podprostorem** (nad $\mathbb{K}$), jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in M,\ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Definice

Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá **vektorovým podprostorem** (nad $\mathbb{K}$), jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in M,\ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Příklad

1. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ a $W := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 + x_2 = 0\}$. Potom je W vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$.

Definice

Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá **vektorovým podprostorem** (nad $\mathbb{K}$), jestliže spolu se zúženými operacemi sčítání a násobení skaláry je sama vektorovým prostorem. Tzn. požadujeme

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, \ \forall v, w \in M, \ a \cdot v + b \cdot w \in M.$$

Příklad

1. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ a $W := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ x_1 + x_2 = 0\}$. Potom je W vektorový podprostor prostoru $\mathbb{R}^2$.
2. Množina

$$W := \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}, \text{ matice } A \text{ má samé nuly na diagonále}\}$$

je vlastní podprostor vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{n\times n}$.

Příklad

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. pro $m = 2$ jsou vektory $(1,0),(0,1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = (0,0)$ plyne $a = b = 0$.

Příklad

Prostor n–tic skalárů $\mathbb{R}^m$ se sčítáním a násobením po složkách je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, ale také vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$. Např. pro $m = 2$ jsou vektory $(1,0),(0,1) \in \mathbb{R}^2$ lineárně nezávislé, protože z $a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1) = (0,0)$ plyne $a = b = 0$.
Dále, vektory $(1,0),(\sqrt{2},0) \in \mathbb{R}^2$ jsou lineárně závislé nad $\mathbb{R}$, protože $\sqrt{2} \cdot (1,0) = (\sqrt{2},0)$, ovšem nad $\mathbb{Q}$ jsou lineárně nezávislé!
Nad $\mathbb{R}$ tedy tyto dva vektory generují jednorozměrný podprostor, zatímco nad $\mathbb{Q}$ je dvourozměrný.

Příklad

Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \leq n \leq \infty$. Podprostory jsou rovněž např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy ($f(-x) = \pm f(x)$).

Příklad

Polynomy stupně nejvýše m tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_m[x]$. Polynomy můžeme chápat jako zobrazení $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a sčítání a násobení skaláry definujeme takto: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$. Polynomy všech stupňů také tvoří vektorový prostor $\mathbb{R}_\infty[x]$ a $\mathbb{R}_m[x] \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ je vektorový podprostor pro všechna $m \le n \le \infty$. Podprostory jsou rovněž např. všechny sudé polynomy nebo liché polynomy $(f(-x) = \pm f(x))$.

Příklad

Úplně analogicky jako u polynomů můžeme definovat strukturu vektorového prostoru na množině všech zobrazení $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nebo všech zobrazení $M \to V$ libovolné pevně zvolené množiny M do vektorového prostoru V.

Generátory podprostoru

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechť W_i, $i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V, $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \cap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \cap_{i \in I} W_i$.

Generátory podprostoru

Protože podmínka v definici podprostoru obsahuje pouze univerzální kvantifikátory, je jistě průnik podprostorů opět podprostor. Snadno to ověříme i přímo: Nechť W_i, $i \in I$, jsou vektorové podprostory ve V, $a, b \in \mathbb{K}$, $u, v \in \cap_{i \in I} W_i$. Pak pro všechny $i \in I$, $a \cdot u + b \cdot v \in W_i$, to ale znamená, že $a \cdot u + b \cdot v \in \cap_{i \in I} W_i$.

Definice

Zejména je tedy podprostorem průnik všech podprostorů $W \subseteq V$, které obsahují předem danou množinu vektorů $M \subseteq V$. Říkáme, že tato M **generuje** podprostor $\langle M \rangle$, nebo že prvky M jsou **generátory** podprostoru $\langle M \rangle$.

Věta

Pro každou podmnožinu $M \subseteq V$ platí

1. $\langle M\rangle = \{a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_k \cdot u_k;\ k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, u_j \in M, j = 1, \ldots, k\}$
2. $M = \langle M\rangle$ *právě když* M *je vektorový podprostor*
3. *jestliže* $N \subseteq M$ *pak* $\langle N\rangle \subseteq \langle M\rangle$ *je vektorový podprostor*
4. $\langle\emptyset\rangle = \{0\} \subseteq V$, *triviální podprostor.*

Plán přednášky

Definice

Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$, nazýváme **součtem podprostorů** V_i. Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \ldots, V_k \subseteq V$,

$$V_1 + \cdots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k \rangle.$$

Definice

Nechť V_i, $i \in I$, jsou podprostory ve V. Pak podprostor generovaný jejich sjednocením, tj. $\langle \cup_{i \in I} V_i \rangle$, nazýváme **součtem podprostorů** V_i. Značíme $\sum_{i \in I} V_i$. Zejména pro $V_1, \dots, V_k \subseteq V$,

$$V_1 + \dots + V_k = \langle V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k \rangle.$$

Viděli jsme, že každý prvek v uvažovaném součtu podprostorů můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z podprostorů V_i. Protože však je sčítání vektorů komutativní, lze k sobě poskládat členy patřící do stejného podprostoru a pro konečný součet k podprostorů tak dostáváme

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \{v_1 + \dots + v_k;\ v_i \in V_i, i = 1, \dots, k\}.$$

Definice

Součet $W = V_1 + \cdots + V_k \subseteq V$ se nazývá **přímý součet** podprostorů, jsou-li průniky všech dvojic triviální, tj. $V_i \cap V_j = \{0\}$ pro všechny $i \neq j$. V takovém případě lze každý vektor $w \in W$ napsat právě jedním způsobem jako součet

$$w = v_1 + \cdots + v_k,$$

kde $v_i \in V_i$. Pro přímé součty píšeme

$$W = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k = \oplus_{i=1}^{k} V_i.$$

Definice

Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V[a]. Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$.

[a] Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je *prázdnou* bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Definice

Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V[a]. Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$.

[a] Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je *prázdnou* bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Bázi k-rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k-tici $\underline{v} = (v_1 \dots, v_k)$ bázových vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.

Definice

Podmnožina $M \subseteq V$ se nazývá **báze vektorového prostoru** V, jestliže $\langle M \rangle = V$ a M je lineárně nezávislá. Vektorový prostor, který má konečnou bázi nazýváme **konečněrozměrný**, mohutnost báze nazýváme **dimenzí** V[a]. Nemá-li V konečnou bázi, říkáme, že V je **nekonečněrozměrný**. Píšeme $\dim V = k$, $k \in \mathbb{N}$, případně $k = \infty$.

[a] Všimněme si, že triviální podprostor je generován prázdnou množinou, která je *prázdnou* bazí. Má tedy triviální podprostor dimenzi nulovou.

Bázi k-rozměrného prostoru budeme obvykle zapisovat jako k-tici $\underline{v} = (v_1 \ldots, v_k)$ bázových vektorů. Jde tu především o zavedení konvence: U konečněrozměrných podprostorů budeme totiž vždy uvažovat bázi včetně zadaného pořadí prvků i když jsme to takto, striktně vzato, nedefinovali.
Zjevně, je-li $(v_1, \ldots, v_n)$ bazí V, je celý prostor V přímým součtem jednorozměrných podprostorů

$$V = \langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle v_n \rangle.$$

Věta

Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.

Věta

Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.

Silnější tvrzení je **Steinitzova věta o výměně**, která říká, že pro každou konečnou bázi a každý systém lineárně nezávislých vektorů ve V umíme najít podmnožinu bázových vektorů, které záměnou za zadané nové vektory dají opět bázi. Důsledky tohoto tvrzení jsou:

Věta

Z libovolné konečné množiny generátorů vektorového prostoru V lze vybrat bázi. Každá báze V má přitom stejný počet prvků.

Silnější tvrzení je **Steinitzova věta o výměně**, která říká, že pro každou konečnou bázi a každý systém lineárně nezávislých vektorů ve V umíme najít podmnožinu bázových vektorů, které záměnou za zadané nové vektory dají opět bázi. Důsledky tohoto tvrzení jsou:

Důsledek

1. *Každé dvě báze konečněrozměrného vektorového prostoru mají stejný počet vektorů.*
2. *Má-li V konečnou bázi, lze každou lineárně nezávislou množinu doplnit do báze.*
3. *Báze konečněrozměrných vektorových prostorů jsou právě maximální lineárně nezávislé množiny*
4. *Báze prostoru s konečnou dimenzí jsou právě minimální množiny generátorů*

Věta

Nechť $W, W_1, W_2 \subseteq V$ jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí

1. $\dim W \leq \dim V$
2. $V = W$ *právě když* $\dim V = \dim W$
3. $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

Věta

Nechť $W, W_1, W_2 \subseteq V$ jsou podprostory v prostoru konečné dimenze. Pak platí

1. $\dim W \leq \dim V$
2. $V = W$ *právě když* $\dim V = \dim W$
3. $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$.

Důsledek

Je-li V prostor dimenze n, pak

- *každá n-prvková množina lineárně nezávislých vektorů generuje V a*
- *každá n-prvková množina generátorů V je lineárně nezávislá.*

V obou případech jde tedy o bázi vektorového prostoru V.

Příklad

1. $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n. Bází je např. n-tice vektorů

$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,\dots,0,1)).$$

Tuto bázi nazýváme **standardní báze v** $\mathbb{K}^n$. Všimněme si, že v případě konečného pole skalárů, např. $\mathbb{Z}_k$, má celý vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ jen konečný počet k^n prvků.

Příklad

1. $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n. Bází je např. n-tice vektorů

$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,\dots,0,1)).$$

   Tuto bázi nazýváme **standardní báze v** $\mathbb{K}^n$. Všimněme si, že v případě konečného pole skalárů, např. $\mathbb{Z}_k$, má celý vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ jen konečný počet k^n prvků.

2. $\mathbb{C}$ jako v. p. nad $\mathbb{R}$ má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i.

Příklad

1. $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n. Bází je např. n-tice vektorů

$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,\dots,0,1)).$$

Tuto bázi nazýváme **standardní báze v** $\mathbb{K}^n$. Všimněme si, že v případě konečného pole skalárů, např. $\mathbb{Z}_k$, má celý vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ jen konečný počet k^n prvků.

2. $\mathbb{C}$ jako v. p. nad $\mathbb{R}$ má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i.
3. $\mathbb{K}_m[x]$, tj. prostor polynomů stupně nejvýše m, má dimenzi $m+1$, bazí je např. posloupnost $1, x, x^2, \dots, x^m$.

Příklad

1. $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n. Bází je např. n-tice vektorů

$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,\dots,0,1)).$$

   Tuto bázi nazýváme **standardní báze v** $\mathbb{K}^n$. Všimněme si, že v případě konečného pole skalárů, např. $\mathbb{Z}_k$, má celý vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ jen konečný počet k^n prvků.

2. $\mathbb{C}$ jako v. p. nad $\mathbb{R}$ má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i.
3. $\mathbb{K}_m[x]$, tj. prostor polynomů stupně nejvýše m, má dimenzi $m+1$, bazí je např. posloupnost $1, x, x^2, \dots, x^m$.
4. Vektorový prostor všech polynomů $\mathbb{K}[x]$ má dimenzi ∞, umíme však ještě stále najít bázi (i když s nekonečně mnoha prvky): $1, x, x^2, \dots$.

Příklad

1. $\mathbb{K}^n$ má (jako vektorový prostor nad $\mathbb{K}$) dimenzi n. Bází je např. n-tice vektorů
$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0)\dots,(0,\dots,0,1)).$$
Tuto bázi nazýváme **standardní báze v** $\mathbb{K}^n$. Všimněme si, že v případě konečného pole skalárů, např. $\mathbb{Z}_k$, má celý vektorový prostor $\mathbb{K}^n$ jen konečný počet k^n prvků.
2. $\mathbb{C}$ jako v. p. nad $\mathbb{R}$ má dimenzi 2, bázi tvoří např. čísla 1 a i.
3. $\mathbb{K}_m[x]$, tj. prostor polynomů stupně nejvýše m, má dimenzi $m+1$, bazí je např. posloupnost $1, x, x^2, \dots, x^m$.
4. Vektorový prostor všech polynomů $\mathbb{K}[x]$ má dimenzi ∞, umíme však ještě stále najít bázi (i když s nekonečně mnoha prvky): $1, x, x^2, \dots$.
5. Vektorový prostor $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ má dimenzi ∞ a nemá spočetnou bázi.

Plán přednášky

Když je množina $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Když je množina $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_n - b_n) \cdot v_n$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Definice

Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi $(v_1, \ldots, v_n)$ se nazývají **souřadnice vektoru** v v této bázi.

Báze jako zobrazení

Přiřazení, které vektoru $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$, budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \to \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w);\ \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u);\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

Příklad

Vektor $w = (3,2,1)$ má ve standardní bázi $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ souřadnice

$$[w]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zatímco v bázi $\mathbf{u} = \big((1,1,1),\ (1,1,0),\ (1,0,0)\big)$ má w souřadnice

$$[w]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

protože $w = (3,2,1) = 1 \cdot (1,1,1) + 1 \cdot (1,1,0) + 1 \cdot (1,0,0)$.
Všimněte si, že když říkáme vektor $w = (3,2,1)$, tak tím vlastně automaticky myslíme tento vektor vztažený ke standardní bázi $\mathbf{e}$.

Příklad

Polynom $p(x) = kx + q$ má ve standardní bázi $\mathbf{e} = (x, 1)$ prostoru lineárních polynomů souřadnice

$$[p(x)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix},$$

zatímco v bázi $\mathbf{u} = (x - 1, x + 1)$ má polynom $p(x)$ souřadnice

$$[p(x)]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{k-q}{2} \\ \frac{k+q}{2} \end{pmatrix},$$

protože $p(x) = kx + q = \frac{k-q}{2} \cdot (x - 1) + \frac{k+q}{2} \cdot (x + 1)$.