Matematika I – 8. přednáška
Lineární zobrazení

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

16. 4. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (http://www.math.muni.cz/~horak)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/~{}lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

Souřadnice vektoru v dané bázi

Když je množina $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_n - b_n) \cdot v_n,$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Souřadnice vektoru v dané bázi

Když je množina $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ báze, můžeme každý vektor $v \in V$ vyjádřit jako lineární kombinaci $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Předpokládejme, že to uděláme dvěma způsoby:

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

Potom ale

$$0 = (a_1 - b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_n - b_n) \cdot v_n,$$

a proto $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \dots, n$. Lze tedy každý vektor zadat právě jediným způsobem jako lineární kombinaci bázových vektorů.

Definice

Koeficienty této jediné lineární kombinace vyjadřující daný vektor $v \in V$ ve zvolené bázi $(v_1, \dots, v_n)$ se nazývají **souřadnice vektoru** v v této bázi.

Báze jako zobrazení

Přiřazení, které vektoru $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$, budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \to \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w);\ \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u);\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

[1] Transpozici píšeme proto, abychom si zvykali, že se souřadnicemi budeme pracovat jako se sloupcovými vektory.

Báze jako zobrazení

Přiřazení, které vektoru $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ přiřadí jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$, budeme značit stejným symbolem $\underline{v} : V \to \mathbb{K}^n$. Má tyto vlastnosti:

- $\underline{v}(u + w) = \underline{v}(u) + \underline{v}(w);\ \forall u, w \in V$
- $\underline{v}(a \cdot u) = a \cdot \underline{v}(u);\ \forall a \in \mathbb{K}, \forall u \in V.$

Totéž zobrazení (v případě potřeby explicitního zmínění báze) budeme rovněž značit $[u]_{\underline{v}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. [1]

[1] Transpozici píšeme proto, abychom si zvykali, že se souřadnicemi budeme pracovat jako se sloupcovými vektory.

Příklad

Vektor $w = (3, 2, 1)$ má ve standardní bázi $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ prostoru $\mathbb{R}^3$ souřadnice

$$[w]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

zatímco v bázi $\mathbf{u} = \big((1, 1, 1),\ (1, 1, 0),\ (1, 0, 0)\big)$ má w souřadnice

$$[w]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

protože $w = (3, 2, 1) = 1 \cdot (1, 1, 1) + 1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (1, 0, 0)$.
Všimněte si, že když říkáme vektor $w = (3, 2, 1)$, tak tím vlastně automaticky myslíme tento vektor vztažený ke standardní bázi $\mathbf{e}$.

Příklad

Polynom $p(x) = kx + q$ má ve standardní bázi $\mathbf{e} = (x, 1)$ prostoru lineárních polynomů souřadnice

$$[p(x)]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} k \\ q \end{pmatrix},$$

zatímco v bázi $\mathbf{u} = (x-1, x+1)$ má polynom $p(x)$ souřadnice

$$[p(x)]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \frac{k-q}{2} \\ \frac{k+q}{2} \end{pmatrix},$$

protože $p(x) = kx + q = \frac{k-q}{2} \cdot (x-1) + \frac{k+q}{2} \cdot (x+1)$.

Změna báze

Příklad

Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^3$, vektor $w = (3, 2, 1)$ a dvě báze

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3), \qquad \mathbf{u} = \big(\underbrace{(1,1,1)}_{u_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{u_2}, \underbrace{(1,0,0)}_{u_3}\big).$$

Viděli jsme, že souřadnice vektoru w v jednotlivých bázích jsou

$$[w]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [w]_{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zejména si všimněte, že

$$[u_1]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [u_2]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [u_3]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad

Vztah dvou souřadnicových vektorů pro vektor w můžeme jednoduše popsat pomocí **maticového násobení**. Pokud dáme vektory báze **u** (či přesněji **souřadnice** vektorů báze **u** v bázi **e**) do **sloupců** matice (označme ji jako T), potom je

$$[w]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ u_1 \quad u_2 \quad u_3 \\ =: T}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T \cdot [w]_{\mathbf{u}}.$$

Příklad

Vztah dvou souřadnicových vektorů pro vektor w můžeme jednoduše popsat pomocí **maticového násobení**. Pokud dáme vektory báze **u** (či přesněji **souřadnice** vektorů báze **u** v bázi **e**) do **sloupců** matice (označme ji jako T), potom je

$$[w]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{array}{c}\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}}\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\end{matrix}\\ \underbrace{\begin{matrix}u_1 & u_2 & u_3\end{matrix}}_{=:T}\end{array} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = T \cdot [w]_{\mathbf{u}}.$$

Matici T říkáme **matice přechodu** od báze **u** k bázi **e**. Zkuste si rovnou rozmyslet, jak bude vypadat matice přechodu od báze **u** k bázi **e**.

Obecně:

Věta

Matici T přechodu (od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$) získáme tak, že souřadnice vektorů báze $\underline{u}$ v bázi $\underline{v}$ napíšeme do sloupců matice T.

Matice přechodu a její inverze

Funkce matice přechodu je taková, že známe-li souřadnice x vektoru v bázi $\underline{u}$, pak jeho souřadnice v bázi $\underline{v}$ se obdrží vynásobením sloupce x maticí přechodu (zleva). Protože inverzní zobrazení k identickému je opět totéž identické zobrazení, je matice přechodu vždy invertibilní a její inverze je právě matice přechodu opačným směrem, tj. od báze $\underline{v}$ k bázi $\underline{u}$.

Plán přednášky

Lineární zobrazení

Definice

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení**, jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V$.

Lineární zobrazení

Definice

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení**, jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V$.

Pokud je cílový vektorový prostor W totožný s výchozím prostorem V, potom nazýváme lineární zobrazení $L : V \to V$ **lineární transformace** prostoru V.

Lineární zobrazení

Definice

Nechť V a W jsou vektorové prostory nad týmž polem skalárů $\mathbb{K}$. Zobrazení $f : V \to W$ se nazývá **lineární zobrazení**, jestliže platí:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v), \ \forall u, v \in V$
2. $f(a \cdot u) = a \cdot f(u), \ \forall a \in \mathbb{K}, \ \forall u \in V.$

Pokud je cílový vektorový prostor W totožný s výchozím prostorem V, potom nazýváme lineární zobrazení $L : V \to V$ **lineární transformace** prostoru V.

Taková zobrazení jsme již viděli např. ve formě násobení matic:

$$\mathbb{K}^n \ni x \mapsto A \cdot x \in \mathbb{K}^m$$

pro matici A typu m/n nad $\mathbb{K}$ je (díky vlastnostem násobení matic) lineárním zobrazením $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x, y)) = a \cdot (x, y)$.

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím apletu na tomto webu.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x,y)) = a \cdot (x,y)$.
2. Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L((x,y)) = (-y,x)$.

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím apletu na tomto webu.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x,y)) = a \cdot (x,y)$.
2. Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L((x,y)) = (-y,x)$.
3. Obecněji, rotace o úhel φ v kladném smyslu[a]

$$L((x,y)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím apletu na tomto webu.

Příklady lineárních zobrazení

Příklad

Následující zobrazení jsou lineární transformace na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2$:

1. Prodloužení nebo zkrácení vektoru $L((x,y)) = a \cdot (x,y)$.
2. Rotace o $\frac{\pi}{2}$ v kladném smyslu $L((x,y)) = (-y,x)$.
3. Obecněji, rotace o úhel φ v kladném smyslu[a]
$$L((x,y)) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$
4. Projekce vektoru na některou souřadnou osu, např. $L((x,y)) = y \cdot e_2 = (0,y)$.

[a] Vyzkoušet a rozmyslet můžete např. s využitím apletu na tomto webu.

Příklady lineárních zobrazení – pokr.

Příklad

1. $$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + 2x_2 - x_3$$
   je lineární zobrazení.
2. $$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + 2x_2x_3$$
   není lineární zobrazení.
3. $$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad L((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + 2x_2 - x_3 - 1$$
   není lineární zobrazení.

Vlastnosti lineárních zobrazení

Obraz $\mathbf{Im}\, f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro (kernel) lineárního zobrazení** f. Lineární zobrazení, které je bijekcí, nazýváme *izomorfismus vektorových prostorů*.

Vlastnosti lineárních zobrazení

Obraz Im $f := f(V) \subset W$ je zjevně vektorový podprostor. Stejně tak je vektorovým podprostorem množina všech vektorů $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) \subset V$. Nazývá se **jádro (kernel) lineárního zobrazení** f. Lineární zobrazení, které je bijekcí, nazýváme *izomorfismus vektorových prostorů*.

Příklad

$$L_1(u) = x \cdot e_1 = (x, 0) \qquad \text{projekce na osu } x,$$
$$L_2(u) = y \cdot e_2 = (0, y) \qquad \text{projekce na osu } y.$$

A proto platí

$$L_1(u) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{tedy je } \operatorname{Ker} L_1 = \langle e_2 \rangle,$$
$$L_2(u) = 0 \quad \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{tedy je } \operatorname{Ker} L_2 = \langle e_1 \rangle.$$

Věta

Nechť $f : V \to W$ je lineární zobrazení. Pro všechny $u, u_1, \dots, u_k \in V$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ platí:

1. $f(0) = 0$
2. $f(-u) = -f(u)$
3. $f(a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k) = a_1 \cdot f(u_1) + \dots + a_k \cdot f(u_k)$
4. *pro každý vektorový podprostor $V_1 \subset V$ je jeho obraz $f(V_1)$ vektorový podprostor ve W.*
5. *Pro každý podprostor $W_1 \subset W$ je množina $f^{-1}(W_1) = \{v \in V;\ f(v) \in W_1\}$ vektorový podprostor ve V.*

Jednoduché důsledky

1. Složení $g \circ f : V \to Z$ dvou lineárních zobrazení $f : V \to W$ a $g : W \to Z$ je opět lineární zobrazení.
2. Lineární zobrazení $f : V \to W$ je izomorfismus právě když $\operatorname{Im} f = W$ a $\operatorname{Ker} f = \{0\} \subset V$. Inverzní zobrazení k izomorfismu je opět izomorfismus.
3. Pro podprostory V_1, V_2 a lineární zobrazení $f : V \to W$ platí $f(V_1 + V_2) = f(V_1) + f(V_2)$, $f(V_1 \cap V_2) \subset f(V_1) \cap f(V_2)$.
4. Zobrazení *přiřazení souřadnic* $\underline{u} : V \to \mathbb{K}^n$, dané libovolně zvolenou bází $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ vektorového prostoru V, je izomorfismus.
5. Dva konečněrozměrné vektorové prostory jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.
6. Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

Plán přednášky

Uvažujme libovolné vektorové prostory U, V nad $\mathbb{K}$ s $\dim U = n$, $\dim V = m$ a mějme lineární zobrazení $f : U \to V$. Pro každou volbu bází $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ na U, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n)$ na V, máme k dispozici příslušná přiřazení souřadnic:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

Přitom je každé lineární zobrazení jednoznačně určeno svými hodnotami na libovolné množině generátorů, zejména tedy na bázi $\underline{u}$.

Matice lineárního zobrazení

Věta

Pro každé lineární zobrazení $L : V \to W$ mezi (konečněrozměrnými) vektorovými prostory V (dimenze n s bází $\mathbf{u}$) a W (dimenze m s bází $\mathbf{v}$) existuje matice A typu $m \times n$ s vlastností

$$[L(w)]_{\mathbf{v}} = A \cdot [w]_{\mathbf{u}} \quad \text{pro všechny vektory } w \in V.$$

Matice A reprezentuje toto lineární zobrazení L v bázích $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, přičemž sloupce matice A jsou souřadnice obrazů bázových vektorů $u_1, \ldots, u_n$ (výchozího prostoru V) v bázi $\mathbf{v}$ (cílového prostoru W), tj.

$$A = \begin{pmatrix} a^{[1]} & \ldots & a^{[n]} \end{pmatrix}, \quad \text{kde} \;\; a^{[i]} = [L(u_i)]_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^m, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Příklad

Nechť $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je pro dáno předpisem:

$$L(u) = x_1\, v_1 + (x_3 - x_2)\, v_2,$$

kde $u = (x_1, x_2, x_3)^T$, $v_1 = (2, -1)^T$, $v_2 = (1, -2)^T$. Určete matici A, která reprezentuje toto lineární zobrazení

(a) v bázích $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ a $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ (standardní báze prostorů $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^2$),

(b) v bázích $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

Řešení

a) Protože je

$$L(u) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix},$$

je $\quad L(e_1) = (2, -1)^T, \quad L(e_2) = (-1, 2)^T, \quad L(e_3) = (1, -2)^T.$
Protože ve standardní bázi $\mathbf{e}$ cílového prostoru $\mathbb{R}^2$ je $w = [w]_{\mathbf{e}}$, je maticová reprezentace zobrazení L v těchto bázích

$$A = A_{\mathbf{e},\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

tj.

$$L(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Řešení

b) Protože je $L(e_1) = (2, -1)^T = v_1$,
$L(e_2) = (-1, 2)^T = -v_2, \quad L(e_3) = (1, -2)^T = v_2$, je
$[L(e_1)]_{\mathbf{v}} = (1, 0)^T, \quad [L(e_2)]_{\mathbf{v}} = (0, -1)^T, \quad [L(e_3)]_{\mathbf{v}} = (0, 1)^T$, je
maticová reprezentace zobrazení L v těchto bázích

$$B = B_{\mathbf{e},\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{tj. } [L(u)]_{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Jestliže za U i V zvolíme tentýž prostor, ale s různými bazemi, a za f identické zobrazení, vyjadřuje náš postup vektory báze $\underline{u}$ v souřadnicích vzhledem k $\underline{v}$. Označme výslednou matici T. Když pak zadáme vektor u

$$u = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

v souřadnicích vzhledem k $\underline{u}$ a dosadíme za u_i, obdržíme souřadné vyjádření $\bar{x}$ téhož vektoru v bázi $\underline{v}$. Stačí k tomu přeskládat pořadí sčítanců a vyjádřit skaláry u jednotlivých vektorů báze. Podle výše uvedeného postupu musí vyjít $\bar{x} = T \cdot x$. Tuto matici jsme již dříve nazvali *matice přechodu* od báze $\underline{u}$ k bázi $\underline{v}$. Matice T zadávající transformaci souřadnic z báze $\underline{u}$ do báze $\underline{v}$ je tedy maticí identického zobrazení $\mathrm{id}_U : U \to U$:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & U \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "(\mathrm{id}_U)_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

Nyní snadno uvidíme, jak se skládají souřadná vyjádření lineárních zobrazení. Uvažme ještě další vektorový prostor W nad $\mathbb{K}$ dimenze k s bází $\underline{w}$, lineární zobrazení $g : V \to W$ a označme příslušnou matici $g_{\underline{v},\underline{w}}$. Pro matice těchto zobrazení dostáváme čímž jsme odvodili:

$$g_{\underline{v},\underline{w}} \circ f_{\underline{u},\underline{v}}(x) = B \cdot (A \cdot x) = (B \cdot A) \cdot x = (g \circ f)_{\underline{u},\underline{w}}(x)$$

pro všechny $x \in \mathbb{K}^n$. Všimněte si, že izomorfismy odpovídají právě invertibilním maticím.

Příklad

Jako příklad skládání lineárních transformací $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uveďme složení dvou rotací Jak jsme dříve ukázali, rotace o úhel φ v kladném smyslu je (ve standardní bázi) reprezentována maticí

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

podobně pro matici A_ψ rotace o úhel ψ.

Příklad

Jako příklad skládání lineárních transformací $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uveďme složení dvou rotací Jak jsme dříve ukázali, rotace o úhel φ v kladném smyslu je (ve standardní bázi) reprezentována maticí

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

podobně pro matici A_ψ rotace o úhel ψ.
Jejich složení (v libovolném pořadí) zřejmě odpovídá rotaci o úhel $\varphi + \psi$, proto

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) & -\sin(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}.$$

Odtud mj. dostáváme platnost známých součtových vzorců pro goniometrické funkce.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & V \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Stejný postup nám dává odpověď na otázku, jak se změní matice zobrazení, změníme-li báze na definičním oboru i oboru hodnot:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "\underline{u}'"', "\simeq"] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{u}"', "\simeq"] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}"] & V \arrow[d, "\simeq"', "\underline{v}'"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "T"] & \mathbb{K}^n \arrow[r, dotted, "f_{\underline{u},\underline{v}}"] & \mathbb{K}^m \arrow[r, dotted, "S^{-1}"] & \mathbb{K}^m
\end{tikzcd}$$

kde T je matice přechodu od $\underline{u}'$ k $\underline{u}$ a S je matice přechodu od $\underline{v}'$ k $\underline{v}$. Je-li tedy A původní matice zobrazení, bude nová dána jako $A' = S^{-1}AT$.

Ve speciálním případě lineární transformace $f : U \to U$ vyjadřujeme zpravidla f pomocí jedné báze $\underline{u}$ prostoru U, proto přechod k nové bázi $\underline{u}'$ bude znamenat změnu na $A' = T^{-1}AT$.

Poznámka

Maticím A, A', pro něž existuje regulární matice T tak, že $A' = T^{-1}AT$, říkáme *podobné matice*. Snadno se ověří, že podobnost matic je relací ekvivalence.

Poznámka

Podobné matice mají hodně stejných vlastností, např.:

1. stejný determinant,
2. stejnou stopu (součet prvků na hlavní diagonále),
3. stejné vlastní hodnoty.

Příklad

V části b) předchozího příkladu je matice přechodu of báze $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ k bázi $\mathbf{e}$ (v cílovém prostoru $\mathbb{R}^2$) rovna

$$V = \begin{pmatrix} [v_1]_{\mathbf{e}} & [v_2]_{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{proto}\, V^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

Příklad

V části b) předchozího příkladu je matice přechodu of báze $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ k bázi $\mathbf{e}$ (v cílovém prostoru $\mathbb{R}^2$) rovna

$$V = \begin{pmatrix} [v_1]_{\mathbf{e}} & [v_2]_{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\text{proto}\, V^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

a je tedy matice uvažovaného lineárního zobrazení v bázích $\mathbf{e}$ a $\mathbf{v}$ rovna

$$B = V^{-1} \cdot A \cdot E_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$