Matematika I – 9. přednáška
Euklidovské prostory, skalární součin

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

23. 4. 2012

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák – **Drsná matematika**, *e*-text.
- Roman Hilscher – `MB101`, *e*-text.
- Slidy z přednášek a democvičení
- Pavel Horák, Úvod do lineární algebry, MU Brno, skripta (`http://www.math.muni.cz/~horak`)
- Luboš Motl, Miloš Zahradník, Pěstujeme lineární algebru, 3. vydání, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, 348 stran (elektronické vydání také na http://www.kolej.mff.cuni.cz/˜lmotm275/skripta/).

Plán přednášky

Euklidovské prostory

Do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nyní doplníme další „strukturu“, abychom dokázali odvodit více informací např. o vzájemné poloze vektorů, podprostorů, délce, vzdálenosti, úhlech, atd. Budeme zkoumat otázky typu

- Jak daleko leží nějaký bod od podprostoru?

Euklidovské prostory

Do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nyní doplníme další „strukturu“, abychom dokázali odvodit více informací např. o vzájemné poloze vektorů, podprostorů, délce, vzdálenosti, úhlech, atd. Budeme zkoumat otázky typu

- Jak daleko leží nějaký bod od podprostoru?
- Který bod v podprostoru je nejblíže k nějakému zvolenému bodu (který leží mimo tento podprostor)?

Skalární součin

Definice

Skalární součin dvou vektorů $u, v \in \mathbb{R}^n$ definujeme jako číslo

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

(To lze zapsat i pomocí maticového násobení jako $u^T \cdot v$, pokud chápeme vektory v $\mathbb{R}^n$ jako sloupcové vektory.) Evidentně platí vztah symetrie $u \cdot v = v \cdot u$.

Skalární součin

Definice

Skalární součin dvou vektorů $u, v \in \mathbb{R}^n$ definujeme jako číslo

$$u \cdot v = u_1 v_1 + \cdots + u_n v_n.$$

(To lze zapsat i pomocí maticového násobení jako $u^T \cdot v$, pokud chápeme vektory v $\mathbb{R}^n$ jako sloupcové vektory.) Evidentně platí vztah symetrie $u \cdot v = v \cdot u$.

Vektorový prostor $\mathbb{R}^n$ s výše uvedeným skalárním součinem nazýváme *Euklidovský* (vektorový) *prostor*.
Délka (též *norma*) vektoru $u \in \mathbb{R}^n$ je pak definována jako

$$\|u\| := \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}.$$

Úhel mezi dvěma nenulovými vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ je číslo $\varphi \in [0, \pi]$ splňující

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\varphi, \qquad \text{tj.} \qquad \cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Úhel mezi dvěma nenulovými vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ je číslo $\varphi \in [0, \pi]$ splňující

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\varphi, \quad \text{tj.} \quad \cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

To, že vůbec lze takto úhel dvou vektorů definovat (tj. že výraz napravo je číslo z intervalu $[-1, 1]$), plyne z následující Cauchyovy (též Cauchy-Schwarzovy) nerovnosti.

Úhel mezi dvěma nenulovými vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ je číslo $\varphi \in [0, \pi]$ splňující

$$u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cos\varphi, \qquad \text{tj.} \qquad \cos\varphi = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|}.$$

To, že vůbec lze takto úhel dvou vektorů definovat (tj. že výraz napravo je číslo z intervalu $[-1, 1]$), plyne z následující Cauchyovy (též Cauchy-Schwarzovy) nerovnosti.

Věta (Cauchy-Schwarzova)

Pro libovolné dva vektory $u, v \in \mathbb{R}^n$ platí

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

přičemž rovnost nastane, právě když jsou vektory u a v lineárně závislé (tj. jeden z nich je násobkem toho druhého).

Cauchyovu nerovnost lze využít pro důkazy řady nerovností nebo pro odhady tzv. vázaných extrémů – více viz MB103.

Cauchyovu nerovnost lze využít pro důkazy řady nerovností nebo pro odhady tzv. vázaných extrémů – více viz MB103.

Příklad

Určete minimální hodnotu, kterou nabývá funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ na přímce $2x + 4y = 1$.

Cauchyovu nerovnost lze využít pro důkazy řady nerovností nebo pro odhady tzv. vázaných extrémů – více viz MB103.

Příklad

Určete minimální hodnotu, kterou nabývá funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ na přímce $2x + 4y = 1$.

Řešení

Podle Cauchyovy nerovnosti aplikované na vektory $(2,4), (x,y) \in \mathbb{R}^2$ máme:

$$(2x + 4y)^2 \leq (2^2 + 4^2)(x^2 + y^2),$$

odkud již snadno dostaneme $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$. Rovnost přitom nastává, jsou-li zmíněné vektory lineárně závislé, tj. je-li $x = 2t, y = 4t, t \in \mathbb{R}$, odkud $t = \frac{1}{20}$ a $(x,y) = (\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$.

Kolmost vektorů

Definice

Řekneme, že vektory u a v jsou navzájem *kolmé* (též *ortogonální*), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud $u \cdot v = 0$. Píšeme $u \perp v$. To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj. $\cos \varphi = 0$.

Kolmost vektorů

Definice

Řekneme, že vektory u a v jsou navzájem *kolmé* (též *ortogonální*), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud $u \cdot v = 0$. Píšeme $u \perp v$. To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj. $\cos \varphi = 0$.

Příklad

(a) Nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ je kolmý na libovolný vektor $u \in \mathbb{R}^n$.

Kolmost vektorů

Definice

Řekneme, že vektory u a v jsou navzájem *kolmé* (též *ortogonální*), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud $u \cdot v = 0$. Píšeme $u \perp v$. To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj. $\cos \varphi = 0$.

Příklad

(a) Nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ je kolmý na libovolný vektor $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Vektory $(2, -1)$ a $(1, 2)$ jsou kolmé.

Kolmost vektorů

Definice

Řekneme, že vektory u a v jsou navzájem *kolmé* (též *ortogonální*), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud $u \cdot v = 0$. Píšeme $u \perp v$. To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj. $\cos \varphi = 0$.

Příklad

(a) Nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ je kolmý na libovolný vektor $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Vektory $(2, -1)$ a $(1, 2)$ jsou kolmé.

(c) Vektory standardní báze $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ jsou navzájem kolmé, tj. $e_i \perp e_j$ pro $i \neq j$.

Kolmost vektorů

Definice

Řekneme, že vektory u a v jsou navzájem *kolmé* (též *ortogonální*), pokud je jejich skalární součin roven nule, tj. pokud $u \cdot v = 0$. Píšeme $u \perp v$. To zřejmě nastane pokud je jeden z těchto vektorů nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ nebo pokud svírají tyto vektory pravý úhel, tj. $\cos\varphi = 0$.

Příklad

(a) Nulový vektor $0 \in \mathbb{R}^n$ je kolmý na libovolný vektor $u \in \mathbb{R}^n$.

(b) Vektory $(2, -1)$ a $(1, 2)$ jsou kolmé.

(c) Vektory standardní báze $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ jsou navzájem kolmé, tj. $e_i \perp e_j$ pro $i \neq j$.

(d) Normálový vektor N roviny $\rho \subseteq \mathbb{R}^3$ je kolmý na tuto rovinu, tj. na všechny vektory u ležící v rovině ρ.

Ortogonální podprostory v $\mathbb{R}^n$

Kolmost podprostorů prostoru $\mathbb{R}^n$ definujeme stejně jako kolmost jednotlivých vektorů, jen musí být příslušný skalární součin nulový pro všechny vektory z daných podprostorů.

Definice

Podprostory X a Y prostoru $\mathbb{R}^n$ jsou navzájem *kolmé* (též *ortogonální*), pokud

$$u \perp v \quad (\text{tj. } u \cdot v = 0) \qquad \text{pro všechny vektory } u \in X,\ v \in Y.$$

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$

Definice

Je-li Y podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, potom se množina

$$Y^\perp := \{u \in \mathbb{R}^n,\ u \perp v \ \text{ pro všechny vektory } v \in Y\}$$

nazývá *ortogonální komplement (doplněk)* podprostoru Y (v prostoru $\mathbb{R}^n$).

$Y^\perp$ je tedy množina všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory v podprostoru Y.

Ortogonální doplněk v $\mathbb{R}^n$

Definice

Je-li Y podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, potom se množina

$$Y^{\perp} := \left\{u \in \mathbb{R}^n,\ \ u \perp v \ \ \text{pro všechny vektory } v \in Y\right\}$$

nazývá *ortogonální komplement (doplněk)* podprostoru Y (v prostoru $\mathbb{R}^n$).

$Y^{\perp}$ je tedy množina všech vektorů, které jsou kolmé na všechny vektory v podprostoru Y.

Příklad

(a) Pro $X = \langle e_1 \rangle, Y = \langle e_2 \rangle, Z = \langle e_3 \rangle$ a $V = \langle e_2, e_3 \rangle$ je

$$\begin{aligned} V^{\perp} &= \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \ x \perp v \ \ \text{pro všechny vektory } v \in V\ \right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \ x \cdot (0, v_2, v_3) = 0 \ \ \text{pro všechny } v_2, v_3 \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \ x = (x_1, 0, 0),\ \ x_1 \in \mathbb{R}\right\} = \langle e_1 \rangle = X. \end{aligned}$$

Příklad

(b) Podobně platí

$$X^{\perp} = \langle e_2, e_3 \rangle = V, \qquad Z^{\perp} = \langle e_1, e_2 \rangle = U.$$

(c) Všimněte si, že ačkoliv $X \perp Z$, není podprostor Z ortogonální doplněk prostoru X (a naopak).

(d) Triviální podprostory $\{0\}$ a $\mathbb{R}^n$ tvoří navzájem ortogonální doplňky, tj.

$$\{0\}^{\perp} = \mathbb{R}^n, \qquad (\mathbb{R}^n)^{\perp} = \{0\}.$$

Tyto vztahy zřejmě interpretujeme tak, že nulový vektor je kolmý ke všem vektorům a že jediný vektor, který je kolmý ke všem vektorům, je právě nulový vektor.

Evidentně pro libovolný podprostor Y platí, že $Y \perp Y^{\perp}$. Ovšem pokud $Y \perp Z$, neplyne z toho nutně, že $Z = Y^{\perp}$. Množina $Y^{\perp}$ může zřejmě být „větší", než je množina Z. V tomto případě ale vždy platí inkluze $Z \subseteq Y^{\perp}$.

Věta

Nechť X a Y jsou podprostory Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$.

(i) *Je-li $X \perp Y$, potom je $X \cap Y = \{0\}$.*

(ii) *$Y^{\perp}$ (a samozřejmě i $X^{\perp}$) je také podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Evidentně pro libovolný podprostor Y platí, že $Y \perp Y^{\perp}$. Ovšem pokud $Y \perp Z$, neplyne z toho nutně, že $Z = Y^{\perp}$. Množina $Y^{\perp}$ může zřejmě být „větší“, než je množina Z. V tomto případě ale vždy platí inkluze $Z \subseteq Y^{\perp}$.

Věta

Nechť X a Y jsou podprostory Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$.

(i) *Je-li $X \perp Y$, potom je $X \cap Y = \{0\}$.*

(ii) *$Y^{\perp}$ (a samozřejmě i $X^{\perp}$) je také podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$.*

Důkaz.

Snadný. $\square$

Je zřejmé, že se vektory z podprostoru Y a z podprostoru $Y^\perp$ navzájem „doplňují“ v tom smyslu, že dohromady vyčerpají celý prostor $\mathbb{R}^n$.

Je zřejmé, že se vektory z podprostoru Y a z podprostoru $Y^\perp$ navzájem „doplňují“ v tom smyslu, že dohromady vyčerpají celý prostor $\mathbb{R}^n$.

Věta

Je-li Y podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, potom

$$\dim Y + \dim Y^\perp = n.$$

Zejména, pokud $\dim Y = k$ a $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$ je báze podprostoru Y a $\underline{v} = (v_1, \dots, v_{n-k})$ je báze podprostoru $Y^\perp$, potom je

$$(\underline{u}, \underline{v}) = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_{n-k})$$

báze celého prostoru $\mathbb{R}^n$.

Poznámka

Z věty vyplývá, že každý vektor $w \in \mathbb{R}^n$ lze *jednoznačně* zapsat jako lineární kombinaci

$$w = \underbrace{a_1 u_1 + \cdots + a_k u_k}_{=:\, y \in Y} + \underbrace{a_{k+1} v_1 + \cdots + a_n v_{n-k}}_{=:\, z \in Y^\perp} = y + z,$$

kde $y \in Y$ a $z \in Y^\perp$. Tato dekompozice vektoru w je *jednoznačná*, protože $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}$ tvoří *bázi* prostoru $\mathbb{R}^n$ (souřadnice vzhledem k této bázi jsou určeny jednoznačně).

Poznámka

Z věty vyplývá, že každý vektor $w \in \mathbb{R}^n$ lze *jednoznačně* zapsat jako lineární kombinaci

$$w = \underbrace{a_1\, u_1 + \cdots + a_k\, u_k}_{=:\, y \in Y} + \underbrace{a_{k+1}\, v_1 + \cdots + a_n\, v_{n-k}}_{=:\, z \in Y^{\perp}} = y + z,$$

kde $y \in Y$ a $z \in Y^{\perp}$. Tato dekompozice vektoru w je *jednoznačná*, protože $u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{n-k}$ tvoří *bázi* prostoru $\mathbb{R}^n$ (souřadnice vzhledem k této bázi jsou určeny jednoznačně).

Přímým důsledkem předchozí věty je tedy

Důsledek

Je-li Y podprostor Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^n$, potom je $\mathbb{R}^n$ přímý součet podprostorů Y a $Y^{\perp}$, tj.

$$\mathbb{R}^n = Y \oplus Y^{\perp}.$$

Plán přednášky

Skalární součin

Hlavní myšlenka obecných vektorových prostorů se skalárním součinem je zobecnit skalární součin z prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, aby bylo možno přirozeným způsobem pracovat s příslušnými vlastnostmi (délka, kolmost, úhel atd.) v „libovolných“ vektorových prostorech.

Skalární součin

Hlavní myšlenka obecných vektorových prostorů se skalárním součinem je zobecnit skalární součin z prostoru $\mathbb{R}^n$ tak, aby bylo možno přirozeným způsobem pracovat s příslušnými vlastnostmi (délka, kolmost, úhel atd.) v „libovolných“ vektorových prostorech.

Definice

Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor. Zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nazýváme *skalární součin* (též *vnitřní součin* z angl. „inner product“) na prostoru V, pokud má následující vlastnosti:

(i) je tzv. *pozitivně definitní*, tj.

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \qquad \text{přičemž} \quad \langle u, u \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0,$$

(ii) je *symetrické*, tj. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,

(iii) je *lineární v první složce*, tj.
$\langle a \cdot u + b \cdot v, w \rangle = a \,.\, \langle u, w \rangle + b \,.\, \langle v, w \rangle$.

Příklad

(a) V prostoru $\mathbb{R}^n$ můžeme zvolit

$$\langle u, v \rangle := u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \qquad \text{(obvyklý skalární součin),}$$

případně pro pevně zvolená kladná čísla $w_1, \ldots, w_n$ lze

$$\langle u, v \rangle := \sum_{i=1}^{n} w_i u_i v_i \qquad \text{(skalární součin s vahou } w_1, \ldots, w_n\text{).}$$

Příklad

(a) V prostoru $\mathbb{R}^n$ můžeme zvolit

$$\langle u, v\rangle := u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i \qquad \text{(obvyklý skalární součin)},$$

případně pro pevně zvolená kladná čísla $w_1, \ldots, w_n$ lze

$$\langle u, v\rangle := \sum_{i=1}^{n} w_i\, u_i\, v_i \qquad \text{(skalární součin s vahou } w_1, \ldots, w_n\text{)}.$$

(b) V prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ můžeme zvolit

$$\langle A, B\rangle := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}.$$

Tj. vynásobíme prvky na stejných pozicích a výsledné součiny sečteme.

Příklad

(c) viz později v MB102 – v prostoru $C[a, b]$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ můžeme zvolit

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx,$$

případně vážený spojitou funkcí $w(x) > 0$.

Příklad

(c) viz později v MB102 – v prostoru $C[a, b]$ spojitých funkcí na intervalu $[a, b]$ můžeme zvolit

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx,$$

případně vážený spojitou funkcí $w(x) > 0$.

(d) Zvolme $n+1$ různých bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom v prostoru polynomů stupně nejvýše n můžeme zvolit

$$\langle p, q\rangle := \sum_{i=0}^{n} p(x_i)\, q(x_i).$$

Případně opět váženo $w_0, w_1, \ldots, w_n$.

Příklad

(c) viz později v MB102 – v prostoru $C[a,b]$ spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$ můžeme zvolit

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx,$$

případně vážený spojitou funkcí $w(x) > 0$.

(d) Zvolme $n+1$ různých bodů $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Potom v prostoru polynomů stupně nejvýše n můžeme zvolit

$$\langle p, q \rangle := \sum_{i=0}^{n} p(x_i)\, q(x_i).$$

Případně opět váženo $w_0, w_1, \ldots, w_n$.

(e) Na vektorovém prostoru všech funkcí $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ skalární součin definovat nelze. (Dokonce zde nelze definovat ani normu, tj. prostor není ani tzv. normovaný prostor, viz dále.)

Délka (norma) vektoru

Definice

Skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definuje přirozeným způsobem *normu* (též *délku*) každého vektoru $u \in V$ předpisem:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Délka (norma) vektoru

Definice

Skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definuje přirozeným způsobem *normu* (též *délku*) každého vektoru $u \in V$ předpisem:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Příklad

(a) V prostoru $\mathbb{R}^n$ s obvyklým skalárním součinem je

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad \text{kde } u = (x_1, \ldots, x_n).$$

Tuto normu budeme nazývat *Euklidovská norma* prostoru $\mathbb{R}^n$ a značit s indexem 2, tj.

$$\|u\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Příklad

(b) Tzv. *Frobeniova norma* v prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ je definována jako

$$\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Příklad

(b) Tzv. *Frobeniova norma* v prostoru $\mathrm{Mat}_{m\times n}$ je definována jako

$$\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

(c) viz MB102 – tzv. *L^2-norma* v prostoru $C[a,b]$ je definována jako

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Podobně jako v prostoru $\mathbb{R}^n$ i v libovolném vektorovém prostoru se skalárním součinem platí Cauchyova nerovnost.

Věta (Cauchy-Schwarzova)

Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory $u, v \in V$ platí

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory u a v lineárně závislé (tj. jeden z nich je násobkem toho druhého).

Podobně jako v prostoru $\mathbb{R}^n$ i v libovolném vektorovém prostoru se skalárním součinem platí Cauchyova nerovnost.

Věta (Cauchy-Schwarzova)

Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory $u, v \in V$ platí

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|,$$

přičemž rovnost nastane právě když jsou vektory u a v lineárně závislé (tj. jeden z nich je násobkem toho druhého).

Definice

Na základě Cauchyovy nerovnosti definujeme *úhel* (též *odchylka*) mezi dvěma vektory u a v jako číslo $\varphi \in [0, \pi]$ splňující

$$\cos \varphi = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}.$$

Pythagorova věta

Věta

Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory $u, v \in V$, $u \perp v$, platí

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Pythagorova věta

Věta

Je-li V vektorový prostor se skalárním součinem, potom pro libovolné dva vektory $u, v \in V$, $u \perp v$, platí

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Důkaz.

Důkaz je snadný, neboť

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=0} + \langle v,v\rangle =$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

$\square$

Normované vektorové prostory

Viděli jsme, že norma vektoru je přirozeným způsobem dána skalárním součinem. Na daném vektorovém prostoru ovšem mohou existovat i další „normy“, které např nemusejí pocházet z nějakého skalárního součinu. Případně taková „norma“ může být korektně definována na vektorovém prostoru, na kterém skalární součin definovat nelze.

Normované vektorové prostory

Viděli jsme, že norma vektoru je přirozeným způsobem dána skalárním součinem. Na daném vektorovém prostoru ovšem mohou existovat i další „normy“, které např nemusejí pocházet z nějakého skalárního součinu. Případně taková „norma“ může být korektně definována na vektorovém prostoru, na kterém skalární součin definovat nelze.

Definice

Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor. Zobrazení $\| \cdot \| : V \to \mathbb{R}$ nazýváme *norma* (též *délka*), pokud má následující vlastnosti:

(i) je tzv. *pozitivně definitní*, tj.

$$\|u\| \geq 0, \qquad \text{přičemž} \qquad \|u\| = 0 \;\Leftrightarrow\; u = 0,$$

(ii) je *pozitivně homogenní*, tj. $\|a \,.\, u\| = |a| \,.\, \|u\|$,

(iii) splňuje *trojúhelníkovou nerovnost*, tj. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Norma na prostoru V tedy přiřazuje každému vektoru $u \in V$ (objektům z prostoru V) reálné číslo $\|u\|$. Ověřte si, že norma definovaná pomocí skalárního součinu splňuje výše uvedené vlastnosti normy.

Jak uvidíme níže, na některých vektorových prostorech lze definovat více (i nekonečně mnoho) různých norem $\|\cdot\|$, zatímco na jiných prostorech normu vůbec definovat nelze. Vektorový prostor V, na kterém je definována (nějaká) norma pak nazýváme *normovaný vektorový prostor*.

Norma na prostoru V tedy přiřazuje každému vektoru $u \in V$ (objektům z prostoru V) reálné číslo $\|u\|$. Ověřte si, že norma definovaná pomocí skalárního součinu splňuje výše uvedené vlastnosti normy.
Jak uvidíme níže, na některých vektorových prostorech lze definovat více (i nekonečně mnoho) různých norem $\|\cdot\|$, zatímco na jiných prostorech normu vůbec definovat nelze. Vektorový prostor V, na kterém je definována (nějaká) norma pak nazýváme *normovaný vektorový prostor*.
Viděli jsme některé normy, které jsou na daném vektorovém prostoru indukovány skalárním součinem. Následující příklady jsou také normy na příslušných prostorech (ale tyto normy už nejsou indukovány skalárním součinem).

Příklad

1. V prostoru $\mathbb{R}^n$ můžeme definovat např. následující normy: pro $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|u\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \text{tzv. 1–norma,}$$

$$\|u\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i| \qquad \text{tzv. stejnoměrná norma,}$$

$$\|u\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{tzv. } p\text{–norma (pro } p \ge 1).$$

Norma $\|\cdot\|_2$ uvedená v předchozím příkladu je speciálním případem p–normy pro $p = 2$. Jako jediná je odvozena ze skalárního součinu. Norma $\|\cdot\|_1$ je zřejmě také p-norma pro $p = 1$. V prostorech s normou $\|\cdot\|_p$ s $p \neq 2$ ale např. neplatí Pythagorova věta. Obdobně lze p–normu nebo stejnoměrnou normu definovat i pro prostor matic nebo spojitých funkcí.

Plán přednášky

1. Euklidovské prostory
2. Vektorové prostory se skalárním součinem
3. Ortogonální podmnožiny a podprostory
   - Ortogonální matice
   - Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

Ortogonální množina vektorů

Definice

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Množina vektorů $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ se nazývá *ortogonální množina* vektorů, pokud $u_i \perp u_j$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Ortogonální množina vektorů

Definice

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Množina vektorů $\{u_1,\ldots,u_k\} \subseteq V$ se nazývá *ortogonální množina* vektorů, pokud $u_i \perp u_j$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Věta

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Potom jsou nenulové vektory v libovolné ortogonální množině prostoru V lineárně nezávislé.

Ortogonální množina vektorů

Definice

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Množina vektorů $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ se nazývá *ortogonální množina* vektorů, pokud $u_i \perp u_j$ pro všechny indexy $i \neq j$.

Věta

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Potom jsou nenulové vektory v libovolné ortogonální množině prostoru V lineárně nezávislé.

Důkaz.

Snadný: je-li $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ ortogonální, pak
z $a_1\, u_1 + \cdots + a_k\, u_k = 0$ dostaneme skalárním vynásobením
s vektorem u_j (pro libovolné j)
$a_1 \langle u_1, u_j \rangle + \cdots + a_j \langle u_j, u_j \rangle + \cdots + a_k \langle u_k, u_j \rangle = \langle 0, u_j \rangle = 0$, a tedy
$a_j \|u_j\|^2 = 0$, odkud $a_j = 0$. $\square$

Definice

Ortogonální množina vektorů $\{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ se nazývá *ortonormální množina*, pokud mají všechny vektory u_i velikost 1, tj. $\|u_i\| = 1$.

Definice

Ortogonální množina vektorů $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$ se nazývá *ortonormální množina*, pokud mají všechny vektory u_i velikost 1, tj. $\|u_i\| = 1$.

Poznámka

Zřejmě platí jednoduché tvrzení, že z každé ortogonální množiny lze vytvořit množinu ortonormální, protože stačí každý vektor „znormalizovat", tj. místo množiny $\{u_1, \dots, u_k\} \subseteq V$ vzít množinu

$$\left\{ \frac{1}{\|u_1\|}\, u_1, \dots, \frac{1}{\|u_k\|}\, u_k \right\}.$$

Příklad (Fourierova analýza)

Ve vektorovém prostoru $C[-L, L]$ uvažujme skalární součin

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,.\,g(x)\,dx \qquad \text{tj. váhová funkce je } w(x) \equiv \frac{1}{L}.$$

Potom množina funkcí

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \cos\frac{n\pi x}{L},\ \sin\frac{n\pi x}{L},\ n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$$

tvoří *ortonormální* množinu.

Ortonormální báze

Proč je výhodné pracovat ve vektorovém prostoru se skalárním součinem s ortonormální bází ukazují následující tvrzení.

Věta

Je-li $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ *ortonormální báze vektorového prostoru* V*, potom jsou souřadnice libovolného vektoru* $w \in V$ *v bázi* $\underline{u}$ *dány pomocí skalárního součinu vektoru* w *s bázovými vektory* u_i*, tj.*

$$[w]_{\underline{u}} = (a_1, \ldots, a_n)^T, \quad \textit{kde} \quad a_i = \langle w, u_i \rangle, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Ortonormální báze

Proč je výhodné pracovat ve vektorovém prostoru se skalárním součinem s ortonormální bází ukazují následující tvrzení.

Věta

Je-li $\underline{u} = (u_1, \dots, u_n)$ ortonormální báze vektorového prostoru V, potom jsou souřadnice libovolného vektoru $w \in V$ v bázi $\underline{u}$ dány pomocí skalárního součinu vektoru w s bázovými vektory u_i, tj.

$$[w]_{\underline{u}} = (a_1, \dots, a_n)^T, \quad \text{kde} \quad a_i = \langle w, u_i \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Důsledek

Skalární součin dvou libovolných vektorů $v, w \in V$, kde $\dim V = n$, *je roven skalárnímu součinu vektorů jejich souřadnic ($v\ \mathbb{R}^n$) vzhledem k nějaké ortonormální bázi $\underline{u}$ prostoru V, tj.*

$$\langle v, w \rangle_V = \langle [v]_{\underline{u}}, [w]_{\underline{u}} \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Ortogonální matice

Definice

Čtvercová matice Q řádu n je *ortogonální* matice, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu vektorů v $\mathbb{R}^n$, tj. pokud platí

$$Q^T Q = I, \quad \text{tj.} \quad Q^{-1} = Q^T.$$

Ortogonální matice

Definice

Čtvercová matice Q řádu n je *ortogonální* matice, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu vektorů v $\mathbb{R}^n$, tj. pokud platí

$$Q^T Q = I, \quad \text{tj.} \quad Q^{-1} = Q^T.$$

Poznámka

Ze vztahu $Q^T Q = I$ plyne, že každá ortogonální matice je regulární a že determinant každé ortogonální matice je buď 1 nebo -1, neboť

$$1 = |I| = |Q^T Q| = |Q^T| \,.\, |Q| = |Q|^2.$$

Příklad

(a) Matice rotace v $\mathbb{R}^2$ o úhel φ v kladném směru

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice a tedy platí

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Příklad

(a) Matice rotace v $\mathbb{R}^2$ o úhel φ v kladném směru

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

je ortogonální matice a tedy platí

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(b) Tzv. *permutační matice* (vzniknou z jednotkové matice tak, že se přeházou její řádky nebo sloupce) jsou ortogonální, např.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Věta

Je-li Q ortogonální matice řádu n, potom platí

$$\langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \textit{pro všechny vektory } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \textit{pro všechny vektory } x \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz.

Plyne snadno z předchozích tvrzení. $\square$

Věta

Je-li Q ortogonální matice řádu n, potom platí

$$\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{pro všechny vektory } x, y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|Qx\|_2 = \|x\|_2 \quad \text{pro všechny vektory } x \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz.

Plyne snadno z předchozích tvrzení. □

Poznámka

Z předchozího plyne jako velmi speciální případ intuitivně zřejmé tvrzení, že rotací v $\mathbb{R}^2$ se nemění délka vektorů.

Projekce vektoru na podprostor

Věta

Nechť W je podprostor vektorového prostoru V a nechť je dán vektor $v \in V$. Je-li $\underline{u} = (u_1, \dots, u_k)$ ortonormální báze podprostoru W, potom má vektor $p \in W$, který je nejblíže k vektoru v, tvar

$$p = a_1 \cdot u_1 + \dots + a_k \cdot u_k, \quad \textit{kde} \quad a_i = \langle v, u_i \rangle, \ i = 1, \dots, k.$$

Platí tedy, že

$$[p]_{\underline{u}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_k \rangle \end{pmatrix}.$$

Důkaz.

Protože je $V = W \oplus W^{\perp}$, můžeme vektor v napsat jediným způsobem jako součet

$$v = p + w, \quad \text{kde } p \in W, \; w \in W^{\perp}.$$

Protože jsou bázové vektory $u_i \in W$, je $u_i \perp w$, tj. $\langle u_i, w \rangle = 0$ $\forall i = 1, \ldots, k$.

Důkaz.

Protože je $V = W \oplus W^{\perp}$, můžeme vektor v napsat jediným způsobem jako součet

$$v = p + w, \quad \text{kde } p \in W,\ w \in W^{\perp}.$$

Protože jsou bázové vektory $u_i \in W$, je $u_i \perp w$, tj. $\langle u_i, w \rangle = 0$ $\forall i = 1, \ldots, k$.
Na druhou stranu, vektor $p \in W$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bázových vektorů $u_1, \ldots, u_k$, tj.

$$p = a_1\, u_1 + \cdots + a_k\, u_k,$$

odkud již plyne vztah

$$\begin{aligned}\langle v, u_i \rangle &= \langle p, u_i \rangle + \underbrace{\langle w, u_i \rangle}_{=0} = a_1 \langle u_1, u_i \rangle + \cdots + a_k \langle u_k, u_i \rangle \\ &= a_i \langle u_i, u_i \rangle = a_i \|u_i\|^2 = a_i \qquad \forall i = 1, \ldots, k.\end{aligned}$$

Poznámka

Z důkazu plyne, že pokud by báze podprostoru W nebyla ortonormální, ale „jen“ *ortogonální* , potom pro koeficienty a_i ve vyjádření projekce p platí

$$a_i = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} = \frac{\langle v, u_i \rangle}{\|u_i\|^2}.$$

Tedy projekce p vektoru v na podprostor W je pak tvaru

$$p = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle} \cdot u_k.$$

Vzdálenost a odchylka vektoru od podprostoru

Definice

Číslo $v(v, W) := \|v - p\|$ nazýváme *vzdálenost* vektoru v od podprostoru W. *Odchylka* vektoru v od podprostoru W je definována jako úhel, který svírá vektor v se svou projekcí p na podprostor W, tj. je to úhel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, pro který je

$$\cos \varphi = \frac{\|p\|}{\|v\|}.$$

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

V předchozím jsme viděli, že pro nalezení projekce daného vektoru v na podprostor W potřebujeme znát ortonormální bázi podprostoru W. V tomto odstavci si ukážeme, jak z *libovolné* báze podprostoru W zkonstruovat bázi ortogonální (a poté bázi ortonormální). Tento proces se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces*.

Pro popis tohoto „ortogonalizačního procesu" není zřejmě potřeba se omezovat na báze a podprostor W, ale můžeme uvažovat libovolnou množinu lineárně nezávislých vektorů v prostoru V.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

V předchozím jsme viděli, že pro nalezení projekce daného vektoru v na podprostor W potřebujeme znát ortonormální bázi podprostoru W. V tomto odstavci si ukážeme, jak z *libovolné* báze podprostoru W zkonstruovat bázi ortogonální (a poté bázi ortonormální). Tento proces se nazývá *Gram-Schmidtův ortogonalizační proces*.
Pro popis tohoto „ortogonalizačního procesu“ není zřejmě potřeba se omezovat na báze a podprostor W, ale můžeme uvažovat libovolnou množinu lineárně nezávislých vektorů v prostoru V.
Nechť jsou tedy dány lineárně nezávislé vektory $u_1, \ldots, u_n \in V$.
V první fázi najdeme *ortogonální* množinu vektorů $v_1, \ldots, v_n$ takovou, že

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle,$$

tj. ortogonální vektory $v_1, \ldots, v_n$ generují stejný podprostor jako původní vektory $u_1, \ldots, u_n$.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

1. Položme $\boxed{v_1 := u_1}$, tj. první vektor se nemění.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

1. Položme $\boxed{v_1 := u_1}$, tj. první vektor se nemění.
2. Najděme projekci p_1 vektoru u_2 na podprostor $W := \langle v_1 \rangle$. Podle předchozího je

$$p_1 = \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 .$$

Potom vektor

$$\boxed{v_2 := u_2 - p_1} = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1$$

splňuje podmínky $v_2 \perp v_1$ a $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$.

Gram-Schmidtův ortogonalizační proces

k. Pokud již máme zkonstruovány ortogonální vektory $v_1, \dots, v_k$ takové, že

$$\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \langle u_1, \dots, u_k \rangle,$$

pak najděme projekci p_k vektoru u_{k+1} na podprostor $W := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Tou je

$$p_k = \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 + \dots + \frac{\langle u_{k+1}, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \cdot v_k.$$

Potom je vektor

$$\boxed{v_{k+1} := u_{k+1} - p_k} = u_{k+1} - \frac{\langle u_{k+1}, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 - \dots - \frac{\langle u_{k+1}, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} \cdot v_k$$

kolmý na všechny předchozí vektory $v_1, \dots, v_k$ a splňuje podmínku

$$\langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle = \langle u_1, \dots, u_{k+1} \rangle.$$

Příklad

Určete ortonormální bázi podprostoru $W = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a následně projekci vektoru

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

na podprostor W, vzdálenost vektoru v od podprostoru W a odchylku vektoru v od podprostoru W.

Ortogonální zobrazení

Podívejme se teď na speciální případ zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárními součiny, která zachovávají velikosti pro všechny vektory $u \in V$.

Definice

Lineární zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárním součinem se nazývá **ortogonální zobrazení**, jesltiže pro všechny $u \in V$

$$\langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, u \rangle .$$

Ortogonální zobrazení

Podívejme se teď na speciální případ zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárními součiny, která zachovávají velikosti pro všechny vektory $u \in V$.

Definice

Lineární zobrazení $f : V \to W$ mezi prostory se skalárním součinem se nazývá **ortogonální zobrazení**, jesltiže pro všechny $u \in V$

$$\langle f(u), f(u)\rangle = \langle u, u\rangle.$$

Z linearity f a z vlastností skalárního součinu vyplývá pro všechny dvojice vektorů rovnost
$\langle f(u+v), f(u+v)\rangle = \langle f(u), f(u)\rangle + \langle f(v), f(v)\rangle + 2\langle f(u), f(v)\rangle$.
Proto všechna ortogonální zobrazení splňují i zdánlivě silnější požadavek, aby platilo pro všechny vektory $u, v \in V$

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.
Obecně, ortogonální zobrazení $f : V \to W$ musí být vždy injektivní, protože podmínka $\langle f(u), f(u) \rangle = 0$ znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme $W = V$.

V úvodní diskusi o geometrii v rovině jsme dokázali, že lineární zobrazení $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zachovává velikosti vektorů, právě když jeho matice ve standardní bázi (a ta je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu) splňuje $A^T \cdot A = E$, tj. $A^{-1} = A^T$.

Obecně, ortogonální zobrazení $f : V \to W$ musí být vždy injektivní, protože podmínka $\langle f(u), f(u) \rangle = 0$ znamená i $\langle u, u \rangle = 0$ a tedy $u = 0$. Bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme $W = V$. Naše podmínka pro matici A ortogonálního zobrazení v ortonormální bázi pak říká pro všechny vektory x a y v prostoru $\mathbb{R}^n$ toto:

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot (A^T \cdot A) \cdot y = x^T \cdot y.$$

Speciálními volbami vektorů standardní báze za x a y dostaneme přímo, že $A^T \cdot A = E$, tedy tentýž výsledek jako v dimenzi dvě.

Matice ortogonálního zobrazení

Dokázali jsme tak následující tvrzení:

Věta

Nechť V je reálný vektorový prostor se skalárním součinem a $f : V \to V$ je lineární zobrazení. Pak f je ortogonální, právě když v některé ortonormální bázi (a pak už ve všech) má matici A splňující $A^T = A^{-1}$ (tedy ortogonální matici).