**1.** Zjistěte, která z funkcí $f_1(x) = e^{-x}$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \ln x$ je řešením diferenciální rovnice $yy''' - y'y'' = 0$.

**2.** Prověřte, zda je zadaná funkce $f$ řešením uvedené dif. rovnice

(a) $x^3y''' + x^2y'' - 3xy' - 3y = 0$, $f(x) = x^3$

(b) $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 0$, $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$

(c) $y'' + y' + 2y = 0$, $f(x) = e^{-x} + 1$.

(d) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $f(x) = 5e^{2x}$

---

**3.** Najděte obecné řešení zadané diferenciální rovnice (případně s použitím tabulek neurčitých integrálů):

(a) $y' = \frac{1}{x} - x$

(b) $y' = 6xe^x$

(c) $y'' = e^x + 5$

(d) $\frac{dy}{dt} = \sin^2 2t$

(e) $\frac{dy}{ds} = \frac{s}{s^2 - 2s + 1}$

(f) $\frac{d^2y}{dp^2} = \sqrt{p} - p$

(g) $y''' = 11$

(h) $y''' = \sin x$

(i) $y'' = 6x^2 + 6x$

(j) $\frac{d^3y}{dt^3} = \sqrt{t}$

(k) $\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{s}{3} - 5$

(l) $\frac{d^3y}{du^3} = \frac{2}{u} + \frac{u}{2}$

(m) $(x-1)dy + x\,dx = 0$

(n) $dy - \sin^3 x\,dx = 0$

(o) $e^{2x}dy + dx = 0$

**4.** Najděte obecné řešení separovaných diferenciálních rovnic (alespoň v implicitním tvaru)

(a) $y' = x^3y^4$

(b) $y' = \frac{x}{y}$

(c) $y' = \frac{y}{x}$

(d) $y' = \sqrt{y}$

(e) $y' = \frac{\sin x}{y}$

(f) $y' = e^y$

(g) $y' = \frac{\sin x}{\cos y}$

(h) $y' = e^{x+y}$

(i) $y' = x(y-1)$

(j) $y' = xe^y$

(k) $y' = y(y-1)$

(l) $y' = \frac{y^2 + 4y + 3}{x^2 + 2x + 1}$.

(m) $x\,dy - y\,dx = 0$

(n) $e^{x+2y}dx = e^{2x-1}dy$

(o) $e^y \sin x\,dx - \cos^2 x\,dy = 0$

(p) $y' = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 y}$

(q) $y^4e^{2x}\,dx + dy = 0$

(r) $x^2y' - yx^2 = 0$

**5.** Najděte partikulární řešení zadané diferenciální rovnice s počáteční podmínkou (podmínkami)

(a) $y' = 6x^2 + 2x + 6$, $y(1) = 18$

(b) $y'' = 15$, $y(2) = 5$, $y(3) = 10$

(c) $y' = \frac{x^2}{y}$, $y(3) = 1$

(d) $y'' = \sqrt{x}$, $y(1) = 1$, $y(4) = 8$

(e) $y'\sqrt{x} = x\sqrt{y} + \sqrt{y}$, $y(9) = 4$

(f) $y'' = 10x$, $y(3) = 1$, $y'(2) = 12$

(g) $x\,dy + y\,dx = 0$, $y(e) = 1$,

(h) $\frac{d^2y}{ds^2} = 25e^{5s}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$

(i) $y' = \ln x$, $y(1) = 3$

(j) $y'' = 15$, $y(2) = 10$, $y'(1) = 5$

(k) $y''' = 6$, $y(1) = y(2) = y(-1) = 1$

(l) $y''' = 15x^{-\frac{1}{2}}$, $y(1) = y'(4) = y''(9) = 0$

(m) $\frac{d^2y}{dt^2} = 6s + 6t$, $y(3) = s$, $y'(3) = 6$

(n) $\frac{dy}{x} = \frac{dx}{y}$, $y(2) = 10$

**Řešení**:

1. $f_1$ a $f_2$ 2. (a) ano, (b) ano, (c) ne, (d) ano.

3. (a) $y = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$, na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; (b) $y = 6xe^x - 6e^x + C$, na R;
(c) $y = e^x + \frac{5x^2}{2} + C_1x + C_2$, na R; (d) $y = -\frac{\sin 2x \cos 2x}{4} + \frac{x}{2} + C$, na R;
(e) $y = \ln|s^2 - 2s + 1| - \frac{1}{s-1} + C$, na $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; (f) $y = \frac{4}{15}p^{\frac{5}{2}} - \frac{p^3}{6} + C_1p + C_2$,
na $(0, +\infty)$; (g) $y = \frac{11x^3}{6} + C_1x^2 + C_2x + C_3$, na R; (h) $y = \cos x + C_1x^2 + C_2x + C_3$, na R;
(i) $y = \frac{x^4}{2} + x^3 + C_1x + C_2$, na R; (j) $y = \frac{8t^{\frac{7}{2}}}{105} + C_1x^2 + C_2x + C_3$, na $(0, +\infty)$;
(k) $y = \frac{s^3}{18} - 5\frac{s^2}{2} + C_1s + C_2$,
na R; (l) $y = 2u\ln|u| - 2u + \frac{u^3}{12} + C_1u^2 + C_2u + C_3$, na $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;
(m) $y = -x - \ln|x-1| + C$, na $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$; (n) $y = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{\cos x}{3} + C$, na R;
(o) $y = -\frac{1}{2}e^{-2x} + C$;

4. (a) $-\frac{1}{3y^3} = \frac{x^4}{4} + C$; (b) $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$; (c) $\ln|y| = \ln|x| + C$; (d) $2\sqrt{y} = x + C$;
(e) $\frac{y^2}{2} = -\cos x + C$; (f) $-e^{-y} = x + C$; (g) $\sin y = -\cos x + C$; (h) $-e^{-y} = e^x + C$;
(i) $\ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C$; (j) $-e^{-y} = \frac{x^2}{2} + C$; (k) $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + C$; (l) $\ln\left|\frac{y+1}{y+3}\right| = \frac{-1}{(x+1)^2} + C$;
(m) viz úloha (c); (n) $-\frac{1}{2}e^{-2y} = -e^{-x+1} + C$; (o) $-e^{-y} = \frac{1}{\cos x} + C$
(p) $\frac{\sin y \cos y}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + C$; (q) $-\frac{1}{3y^3} = \frac{1}{2}e^{2x} + C$; (r) $-\ln|1-y| = \frac{x^3}{3} + C$;

5. (a) $y = 2x^3 + x^2 + 6x + 9$; (b) $y = \frac{15x^2}{2} - \frac{65x}{2} + 40$; (c) $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} - \frac{17}{2}$;
(d) $y = \frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{19}{45}x + \frac{52}{45}$; (e) $2\sqrt{y} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{x} - 20$; (f) $y = \frac{5x^3}{3} - 8x - 20$;
(g) $\ln|y| = 1 - \ln|x|$; (h) $y = e^{5x} - 7x + 3$; (i) $y = x\ln x - x + 4$;
(j) $y = \frac{15x^2}{2} - 10x$; (k) $y = x^3 - 2x^2 - x + 3$; (l) $y = 8x^{\frac{5}{2}} - 45x^2 + 20x + 17$;
(m) $y = t^3 + 3st^2 - 18st - 21t + 28s + 36$; (n) $y^2 = x^2 + 96$;

# Lineár ní rovnice 2. řádu

2. Najděte obecné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty 2. řádu

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(b) $y'' - 5y' + 6y = 1$

(c) $y'' - y' - 2y = 0$

(d) $y'' - y' - 2y = x$

(e) $y'' - 3y' = 0$

(f) $y'' - 3y' = \mathrm{e}^x$

(g) $y'' + 4y' + 4y = 0$

(h) $y'' - 4y' + 8y = 0$

(i) $y'' - 4y' + 4y = 1 - x$

(j) $6y'' - 7y' - 3y = 0$

(k) $y'' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$

(l) $8y'' - 2y' - 15y = 0$

(m) $y'' - y = x^2 + x + 1$

(n) $y'' - y = x\mathrm{e}^x$

(o) $y'' + 9y = 0$

(p) $y'' + 4y = x^2$

3. Najděte partikulární řešení zadané diferenciální rovnice vyhovující počáteční podmínce (podmínkám)

(a) $y' + y = x, \quad y(0) = 7$

(b) $y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y(1) = \mathrm{e}$

(c) $y' - y = \mathrm{e}^x, \quad y(1) = 2\mathrm{e}$

(d) $y'' - y = 0, \quad y(1) = 1, \ y(-1) = 1$

(e) $y'' + y = 1, \quad y(0) = 3, \ y(\frac{\pi}{2}) = 4$

(f) $y'' - 2y' = x + 9, \quad y(0) = 11, y(2) = -8$

(g) $y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 3$

(h) $y'' - 2y' + y = 4\mathrm{e}^x, \quad y(0) = 8, \ y(1) = \mathrm{e}$

**Řešení:**

2. (a) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x}$; (b) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + \frac{1}{6}$; (c) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$;
(d) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$; (e) $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3x}$; (f) $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$;
(g) $y = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2x\mathrm{e}^{-2x}$; (h) $y = C_1\mathrm{e}^{2x}\cos(2x) + C_2\mathrm{e}^{2x}\sin(2x)$; (i) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{4}$;
(j) $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$; (k) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{x}{4}\mathrm{e}^{2x}$; (l) $y = C_1\mathrm{e}^{\frac{3}{2}x} + C_2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$;
(m) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - x^2 - x - 3$; (n) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}$;
(o) $y = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$; (p) $y = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8}$;

3. (a) $y = 8\mathrm{e}^{-x} + x - 1$; (b) $y = \mathrm{e}^x$; (c) $y = 2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$;
(d) $y = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}$; (e) $y = 4\cos x + 3\sin x$; (f) $y = \frac{\mathrm{e}^4\mathrm{e}^{2x} + 1}{1 - \mathrm{e}^4} - \frac{x^2}{2} + 10$;
(g) $y = 3\mathrm{e}^{-x^2}$; (h) $y = 6\mathrm{e}^x - 7x\mathrm{e}^x + 2x^2\mathrm{e}^x$;

# Aplikace diferenciálních rovnic

**1.** Výrobce komponentů do kopírek zjistil, že závislost marginálních nákladů na počtu vyrobených kusů ($x$) lze modelovat vztahem $C'(x) = 900 - 0.6x$ ($C(x)$ jsou náklady v Kč). Jestliže víme, že v případě vyrobení jediného kusu jsou náklady 1050 Kč, sestavte nákladovou funkci $C(x)$. Určete náklady při výrobě 100 ks.

**2.** První měsíc růstu rostliny u některých významných průmyslových plodin jako např. kukuřice, bavlníku nebo sóji, je okamžitá rychlost růstu rostliny $W'(t)$ přímo úměrná již dosažené hmotnosti $W(t)$. Například pro bavlník je to $W'(t) = 0.21W$ ($W$ je hmotnost v mg, $t$ je čas ve dnech). Jestliže tedy na začátku měsíce váží taková rostlinka 70 mg, kolik bude vážit na konci tohoto měsíce?

**3.** Stroncium $^{90}Sr$ má poločas rozpadu 29 let. V zamořené oblasti byla zjištěna koncentrace stroncia v povrchové vrstvě půdy na úrovni 2.5-násobku bezpečnostní hranice. Jak dlouho bude trvat, než úroveň zamoření poklesne alespoň na povolenou bezpečnostní hranici?

**4.** Majitel restaurace zjistil, že zájem o jednu z nabízených specialit neustále klesá. Označíme $y$ počet prodaných porcí za den a sledujeme $y$ jako funkci času $x$ (ve dnech). Předpokládáme vztah $y' + 0.1xy = 0$. Ve sledovaním období 14 dnů ($x \in \langle 1, 14\rangle$ ) bylo zjištěno, že třetí den se prodalo 39 porcí speciality.

(a) Najděte funkci modelující popisovaný jev.

(b) Určete maximální a minimální hodnotu $y$ ve sledovaném období.

**5.** Pořizovací cena stroje byla 36000 Kč a jeho hodnota klesá od doby pořízení nejdříve rychle a pak stále pomaleji (odpisy). Modelujme tento proces na základě vztahu $V' = 500(t - 12)$ ($t$ je čas v letech od pořízení stroje, $V(t)$ hodnota stroje v peněžních jednotkách). Jaká bude zůstatková hodnota stroje po 10 letech od pořízení?

**6.** Velikost $q$ populace jednoho druhu hmyzu žijícího v určité oblasti v subtropech kolísala sezónně. Tuto závislost dobře vystihuje vztah $\frac{dq}{dt} = k\cos(2\pi t)$ ($t$ čas v letech od počátku pozorování, $q(0) = 5000$ jedinců), $k$ je parametr. Sestavte uvažovanou modelovou funkci.

**7.** Náklady na údržbu činžovního domu rostou se stářím domu. Označíme-li $M$ roční náklady, máme tedy funkci $M = M(x)$, kde $x$ je stáří domu v letech. Odvoďte funkci $M(x)$ za předpokladu, že $M'(x) = 900x^2 + 50000$ a dále $M(1) = 51000$ Kč. Určete hodnotu $M(15)$ a pomocí určitého integrálu zjistěte celkový objem nákladů za prvních 15 let.

**8.** Popálenina kůže velikosti $A_0 = 9$ cm$^2$ se bude hojit tak, že její plocha klesá s časem jako funkce $A = A(t)$, přičemž pro proces hojení lze předpokládat závislost $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$ ($A$ je v cm$^2$, $t$ je ve dnech). Jak velká bude popálenina po 5 dnech hojení?

**9.** Rychlost rozpouštění kuchyňské soli ve vodě podléhá vztahu $M' = k(M_0 - M)$, kde $M = M(t)$ je množství již rozpuštěné soli v kg, $t$ čas v minutách od počátku rozpouštění, $M_0$ počáteční množství soli. Jestliže je $M_0 = 10$ kg, a po 20 minutách jsou již rozpuštěny 4 kg, za jak dlouho se rozpustí další 2 kg.

**10.** V obchodní škole se zjišťuje výkonnost studentů v psaní na stroji pomocí hodnoty $N$ udávající průměrný počet slov napsaných za minutu. Je-li $t$ doba v týdnech od počátku školního roku, můžeme chápat $N$ jako funkci $t$, tj. $N = N(t)$. Zlepšování výkonnosti studenta (učení) vyjadřuje vztah $N'(t) = 7e^{-0.1t}$ vedoucí k sestavení modelové funkce. Jestliže $N(0) = 25$ slov / min., stanovte očekávanou hodnotu $N(15)$.

**11.** Marginální náklady na úrovni produkce $x$ jednotek jsou dány vztahem $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$. Jsou-li fixní náklady, tj. $C(0)$, rovny 2000 Kč, najděte náklady na produkci 20 jednotek.

**12.** Jedno z předměstí Chicaga bylo k městu připojeno v době, kdy mělo 5 tisíc obyvatel. Další růst počtu obyvatel tohoto předměstí byl odhadován na základě vztahu $y' = 400 + 600\sqrt{t}$, kde $y$ je počet obyvatel a $t$ je čas v rocích od roku připojení (tj. $y = y(t)$, $y(0) = 5000$). Jaký byl odhad počtu obyvatel na dobu 9 let po připojení?

**13.** Do vesnice o 1000 obyvatel přinese 1 člověk chřipku. Předpokládejme, že v průběhu epidmie rychlost šíření chřipky závisí jednak na počtu již nemocných a jednak na počtu ještě nenakažených, tj. $N'(t) = k \cdot N(t) \cdot [1000 - N(t)]$ ($t$ čas ve dnech od počátku sledování, kdy $N(0) = 1$). Sestavte model průběhu epidemie ve vesnici.

**14.** Pro marginální příjem platí vztah $R' = 400 - 0.4x$ ($x$ počet prodaných kusů, $R(0) = 0$). Jaký bude příjem z 1000 prodaných kusů?

**15.** Pro mnoho druhů zvířat fluktuuje velikost jejich populace v desetiletých cyklech. Například pro jeden druh hlodavce lze předpokládat modelový vztah $\frac{dN}{dt} = 1000\cos(\frac{\pi}{5}t)$ ($N$ velikost populace, čas $t$ je v letech od zvoleného počátku pozorování). Sestavte příslušný model, jestliže $N(5) = 3000$.

**16.** Kolik DM bude po 10 letech na účtu úročeném spojitě, jestliže počáteční stav byl 5000 DM a po pěti letech 7460 DM (přitom na účtu neprobíhaly a neproběhnou žádné transakce)?

**17.** Při úvaze o účinnosti televizní reklamy o novém druhu rostlinného másla se vycházelo z následující úvahy: procentický podíl ze všech diváků, kteří se v průběhu reklamní kampaně postupně dozvědí o novém výrobku lze vyjádřit pomocí neklesající funkce $p = p(t)$, kde $t$ je čas ve dnech od počátku kampaně (tedy $p(0) = 0$). Jaký bude výsledek třítýdenní kampaně, jestliže máme zjištěno, že po deseti dnech vědělo o novém výrobku 40% diváků a předpokládáme vztah $p'(t) = k \cdot [100 - p(t)]$.

**18.** Pro marginální zisk platí vztah $P'(x) = 50 - 0.04x$, kde $x$ je počet vyrobených kusů. Je-li $P(0) = 0$ určete zisk z produkce 100 jednotek.

**19.** Populace ohroženého druhu aljašského soba klesá exponenciálně. Poprvé, když byl tento trend zachycen, byl stav populace 2500 kusů, ale po 10 letech už jen 1200 kusů. Sestrojte matematický model popsaného jevu.

**20.** V polovině 19. století byl formulován v psychologii tzv. *Weber - Fechnerův zákon*, který se zabývá smyslovým vnímáním (např. vnímání zvuku). Při jeho matematickém odvození se vycházelo ze vztahu $\frac{dS}{dR} = k \cdot \frac{1}{R}$ ($R$ je intenzita podnětu, $S = S(R)$ je odpovídající intenzita vnímání tohoto podnětu, $k$ je konstanta úměrnosti). Je-li $R_0$ prahová hodnota intenzity podnětu, tj. $S(R_0) = 0$ (při ní začínáme podnět vnímat), odvoďte uvedený zákon.

**21.** Uvažme modelovou poptávkovou funkci vyjadřující závislost ceny $p$ na počtu kusů prodaných za týden ($x$), tj. $p = p(x)$. Předpokládejme pro marginální cenu úměru $p' = k \cdot p(x)$ ($k$ je konstanta úměrnosti). Z údajů $p(0) = 100$, $p(5) = 78$ sestavte funkci $p(x)$.

**22.** Na jednom jihoamerickém ostrůvku se objevil nový druh králíka. Při prvním pozorování byl odhad velikosti populace 500 jedinců, ale po 2 letech již 1250 kusů. Sestavte příslušnou exponenciální růstovou funkci.

**23.** Funkce $\overline{C}(x)$ vyjadřuje průměrné náklady na 1 kus výrobku v záislosti na počtu $x$ vyprodukovaných výrobků. Jestliže pro mezní průměrné náklady platí vztah $\overline{C}(x) = -\frac{1000}{x}$ a přitom $\overline{C}(100) = 25$, sestavte funkci $\overline{C}(x)$.

**24.** Podle *Newtonova zákona vedení tepla* je rychlost přenosu tepla z tělesa teplejšího na chladnější přímo úměrná rozdílu jejich teplot. Sledujme oteplení malého tělesa, které přineseme zvenku do místnosti. Teplota $t$ tohoto tělesa je funkcí je funkcí času $x$ (v minutách). Je-li $T$ teplota místnosti platí tedy: $\frac{dt}{dx} = k \cdot [T - t(x)]$. Z údajů $t(0) = 5^0$C, $t(5) = 15^0$C, $T = 24^0$C sestavte příslušnou funkci vedení tepla.

**25*.** If the marginal cost function of a product is given by $C' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ and the cost of producing 8 units is \$20 find the cost function and then the cost producing of 64 units.

**26*.** (a) Charred logs found in a tomb in Columbus, Ohio showed only 74% of the carbon 14 expected in living matter. When was the fire?

(b) An oyster shell found in Saipan showed showed only 65% of the carbon 14 expected in living tissue. When did the oyster meet its fate?

**Aplikační úlohy k řešení**

**1.** $C(x) = 900x - 0.3x^2 + 150.3; C(100) = 60150.30$ Kč; **2.** $W = 70e^{0.21t}; W(30) = 38120$ mg; **3.** $y = y_0e^{-.0239t}; t = 38$ let; **4.** (a) $y = 40.8e^{-0.005x^2}$; (b) $y_{max} \doteq 41$, $y_{min} \doteq 15$; **5.** $V(t) = 250t^2 - 6000t + 36000; V(10) = 1000$ Kč; **6.** $q(t) = 5000 - \frac{k}{2\pi}\sin(2\pi t)$; **7.** $M(x) = 300x^3 + 50000x + 700$; 9432375 Kč; **8.** $\doteq 5.5\text{cm}^2$; **9.** $M = 10(1 - e^{-0.02554t})$; dalších asi 16 minut **10.** $N(t) = 95 - 70e^{-0.1t}$; $N(15) = 79.38$; **11.** $C(x) = 0.1x^3 + x^2 + 2000$; $c(20) = 3200$ Kč; **12.** $y = 400t + 400\sqrt{t^3} + 5000$; $y(9) = 19400$; **13.** $y = \dfrac{1000}{1 + 999e^{-0.49t}}$; **14.** $R(x) = 400x - 0.2x^2; R(1000) = 200000$; **15.** $N = 3000 + \frac{5000}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$; **16.** 11130.32 DM; **17.** $p(t) = 100 - 100e^{-0.0511t}; p(21) = 65.8\%$; **18.** $P(x) = 50x - 0.02x^2; P(100) = 4800$; **19.** $y = 2500e^{-0.0734t}$; **20.** $S(R) = k\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$; **21.** $p = 100e^{-0.0497x}$; **22.** $y = 500e^{0.458t}$; **23.** $\overline{C}(x) = 4630.17 - 1000\ln x$; **24.** $t = 24 - 19e^{-0.1494t}$; **25.** $C(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 8$; $C(64) = 56$; **26.** (a) 243 years ago; (b) 350 years ago; (c) 4756 years ago; (d) 17127 years ago; **27.** 7.39 times more than at the beginning;