1 Polynomy a interpolace

1.1 Interpolace

Metodou neurčitých koeficientů sestrojte polynom $P(x)$ procházející body:

1. $[2,0]$, $[1,2]$, $[3,1]$

$$\left[P(x) = \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{13}{2}x + 7\right]$$

2. $[-2,0]$, $[-1,6]$, $[1,6]$, $[3,30]$

$$\left[P(x) = x^3 - x + 6\right]$$

3. $[0,1]$, $[1,2+i]$, $[i,-1]$

$$\left[P(x) = x^2 + ix + 1\right]$$

1.2 Lagrangeův interpolační polynom

Sestrojte Lagrangeův interpolační polynom $P(x)$ procházející body:

1. $[1,0]$, $[2,1]$, $[3,2]$

$$[P(x) = x - 1]$$

2. $[-1,2]$, $[0,1]$, $[1,0]$, $[2,5]$

$$\left[P(x) = x^3 - 2x + 1\right]$$

3. $[-1,3]$, $[0,-3]$, $[1,3]$, $[2,15]$

$$\left[P(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 3\right]$$

1.3 Hermiteův interpolační polynom

Sestrojte Hermiteův interpolační polynom $P(x)$ splňující:

1. $f(1) = 0,\ f(2) = 3,\ f'(1) = 1,\ f'(2) = 3,$

$$\left[P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5\right]$$

2. $f(-1) = 3,\ f(0) = 2,\ f(1) = 7,\ f'(-1) = 0,\ f'(0) = 1,\ f'(1) = 12,$

$$\left[P(x) = x^5 + 3x^2 + x + 2\right]$$

3. $f(2) = 64,\ f(1) = -6,\ f(0) = -10,\ f'(2) = 173,\ f'(1) = 14,\ f'(0) = 1,$

$$\left[P(x) = 2x^5 + x^3 + x - 10\right]$$

1.4 Rozklad na parciální zlomky

Rozložte lomenné funkce na parciální zlomky:

1. $\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2}$

$$\left[\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right]$$

2. $\frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$

$$\left[\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$

3. $\frac{3x^3+3x^2-1}{2x^4+x^3+2x^2+x}$

$$\left[\frac{1}{2x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{x}\right]$$

4. $\frac{x^7+2x^6+3x^5+5x^4+2x^3+5x^2+1}{x^5+2x^3+x}$

$$\left[x^2+2x+1+\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{x}\right]$$

5. $\frac{x^5-3x^4-x^3+4x^2-3x-2}{x^3-x}$

$$\left[x^2-3x+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{x}\right]$$

Rozložte polynom v $\mathbb{R}$ (pomocí Hornerova schématu):

1. x^4-5x^2+4

$$[(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)]$$

2. $x^4-6x^3+13x^2-12x+4$

$$\left[(x-1)^2(x-2)^2\right]$$

3. $x^6-4x^5-3x^4+32x^3-54x^2+36x$

$$\left[x(x-2)(x-3)(x+3)(x^2-2x+2)\right]$$

2 Diferenciální počet

2.1 Supremum a infimum

Nalezněte infima a suprema množin:

1. $X = \left\{\frac{3n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$$[inf(X) = 2,\ sup(X) = 3]$$

2. $X = \{|x-4|\,, |x| < 3\}$

$$[inf(X) = 1,\ sup(X) = 7]$$

3. $X = \left\{-x^2 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}\right\}$

$$[inf(X) \text{ neexistuje},\ sup(X) = 10]$$

4. $X = \left\{\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, 0 < m < n\right\}$

$$[inf(X) = 0,\ sup(X) = 1]$$

5. $X = \left\{r \in \mathbb{Q}, r^2 < 2\right\}$

$$\left[inf(X) = -\sqrt{2},\ sup(X) = \sqrt{2}\right]$$

2.2 Definiční obor funkce

Určete definiční obory funkcí:

1. $y = \sqrt{3x - x^3}$

$$\left[\left(-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[0, \sqrt{3}\right]\right]$$

2. $y = \sqrt{\log_5 x + 1}$

$$\left[\left[\tfrac{1}{5}, \infty\right)\right]$$

3. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin(\pi x)}$

$$[\mathbb{R}^+ - \mathbb{N}]$$

4. $y = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\sqrt{x+1}$

$$[\{-1\} \cup (1, \infty)]$$

2.3 Limita posloupnosti

Spočtěte limity posloupností:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$

   [0]

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+2}$

   [∞]

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1}$

   [∞]

4. $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{n}}$

   [0]

5. $\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n$

   [0]

6. $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

   [0]

7. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)^2(1-4n)(n+1)}{2n^4-100n^3}$

   [-2]

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{5+(-1)^n\cdot n}{n+2}$

   [neexistuje]

9. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n})$

   [1]

10. $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{a+\frac{1}{n}} - \sqrt{a})$

    $\left[\frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$

11. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[2]{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\ldots\sqrt[n]{2}$

    (tip: součet geometrické řady)

    [2]

12. $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^2+1)}{n}$

    [0]

2.4 Limita funkce

Spočtěte limity funkcí:

1. $\lim_{x\to-3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$

   $\left[-\frac{2}{3}\right]$

2. $\lim_{x\to-1} \frac{x^3-2x-1}{x^4+2x+1}$

   $\left[-\frac{1}{2}\right]$

3. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$

   $\left[\frac{5}{2}\right]$

4. $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}$

   $\left[\frac{1}{4}\right]$

5. $\lim_{x\to0} \frac{x^5-x^4}{\sqrt[3]{1+x^4}-1}$

   (tip: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$)

   $[-3]$

6. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x), a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$

   $\left[\frac{a+b}{2}\right]$

7. $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$

   $\left[\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}\right]$

8. $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

   $\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\right]$

9. $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

   $\left[\frac{1}{2}\right]$

10. $\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{5x}$

    $\left[\frac{2}{5}\right]$

11. $\lim_{x\to0} \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

    (tip: $e^x-e^{-x}=(e^x-1)-(e^{-x}-1)$)

    $[2]$

12. $\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

(tip: substituce $x = \operatorname{tg} t$ (+ zaměnit $x \to 0$ za $t \to \ldots$))

[1]

13. $\lim_{x\to 0} x \sin x$

[0]

14. $\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$
$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$

[$-1; 1$]

15. $\lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}$
$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}$

[$-\infty; \infty$]

16. $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$
$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

[$0; \infty$]

17. * $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

[1]

18. * $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

19. * $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

20. * $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x, a \in \mathbb{R}$
(Rada: Pomožte si substitucí $\frac{1}{y} = \frac{a}{x}$ a vyjádřením Eulerova čísla $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Nezapomeňte zaměnit $\lim_{x\to 0}$ za $\lim_{y\to\ldots}$.)

[e^a]

2.5 Spojitost funkce

Pozn.: Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, resp. jestliže $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

1. Jak je nutno dodefinovat funkci $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ v bodě $x = 1$, aby byla spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$?

$$\left[f(1) = \frac{2}{3};\ tj.\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-1} & x \neq 1 \\ \frac{2}{3} & x = 1 \end{cases} \right]$$

2. Buď $f(x) = \begin{cases} 2\cos x & x \geq 0 \\ \frac{x+\sin x}{x} & x < 0 \end{cases}.$
   Je funkce f spojitá v bodě $x = 0$?

[*ano*]

3. Buď $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & x > 1 \end{cases}.$
   Určete parametr a tak, aby byla funkce f spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$.

[$a = 1$]

4. Buď $f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$
   Určete parametry A, B tak, aby byla funkce f spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$.

[$A = -1, B = 1$]

5. Udejte příklad funkce f definované na celém $\mathbb{R}$, která není spojitá v žádném bodě $x \in \mathbb{R}$, ale její absolutní hodnota $f^* = |f|$ je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$.

[např. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$]

2.6 Body nespojitosti

Najděte body nespojitosti a určete jejich druh:

Pozn.: Postup najdete v Teorii ke cvičení v souboru Diferenciální počet 8.

1. $f(x) = \frac{x^3 - x^2}{x-1}$

[$x = 1$ ON]

2. $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{|x|}$

[$x = 0$ NN 1.d.]

3. $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$

[$x = 3$ NN 2.d.]

2.7 Derivace

Zderivujte funkce:

1. $y = e^{2x}$

$\left[y' = 2e^{2x}\right]$

2. $y = (\sqrt{x}+1)(\frac{1}{\sqrt{x}}+1)$

$\left[y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right]$

3. $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$

$\left[y' = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}{\cos^2 x}\right]$

4. $y = \sin(\sin(\sin x))$

$[y' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x]$

5. $y = \ln(\sqrt{1+e^{2x}})$

$\left[y' = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right]$

6. $y = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$

$\left[y' = -\frac{\sqrt{2}\sin 2x}{2\sqrt{1+\cos 2x}}\right]$

7. $y = \sqrt{\frac{1+\cos^2 x}{2}}$

$\left[y' = -\frac{\sqrt{2}\sin x\cos x}{2\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]$

8. $y = \sqrt{\frac{1-e^x}{1+e^x}}$

$\left[y' = -\frac{e^x}{(1+e^x)\sqrt{1-e^{2x}}}\right]$

9. $y = \sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x+1} - \frac{\pi}{4}}$

$\left[y' = -\frac{1}{2((2x+1)^2+(x+1)^2)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2x+1}-\frac{\pi}{4}}}\right]$

10. * $y = \frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$\left[y' = \frac{1}{x^3+1}\right]$

11. * $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}$

$\left[y' = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right]$

12. * $y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$

$\left[y' = \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}}\right]$

Vypočtěte n-tou derivaci funkcí:

1. $y = x \ln x$, $n = 5$

$\left[y^{(v)} = -6x^{-4}\right]$

2. $y = x^2 e^x$, $n = 4$

$\left[y^{(iv)} = 12e^x + 8xe^x + x^2e^x\right]$

3. $y = \frac{1+x}{1-x}$, $n = 3$

$\left[y^{(iii)} = \frac{12}{(1-x)^4}\right]$

2.8 Tečna a normála

Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkcí v bodě x_0:

1. $y = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$\left[t : y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}, n : y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}\right]$

2. $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x_0 = 1$

$\left[t : y = -\frac{1}{2}x + 1, n : y = 2x - \frac{3}{2}\right]$

3. $y = 2x^3 + 1$, $x_0 = 0$

$[t : y = 1, n : x = 0]$

4. $y = 2\sqrt{2} \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$\left[t : y = 2x + 2 - \frac{\pi}{2}, n : y = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{\pi}{8}\right]$

5. $y = e^{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = 0$

$[t : y = x + 1, n : y = -x + 1]$

2.9 L'Hospitalovo pravidlo

Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte limity funkcí:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\arcsin x}$

   [1]

2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 4x}-\cos x}{\sin 2x}$

   [2]

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x-\sin x}$

   [2]

4. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3}{a^x}$, $a > 1$

   [0]

5. $\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln(1-x^2)}{\ln(\sin \pi x)}$

   [1]

6. $\lim_{x\to 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$

   $\left[\frac{1}{2}\right]$

7. $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x-1})$

   $\left[\frac{1}{2}\right]$

8. $\lim_{x\to 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x)$

   [0]

9. $\lim_{x\to \infty} (\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x) \ln x$

   [0]

10. $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

    [1]

11. $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\operatorname{tg} x}$

    [1]

12. $\lim_{x\to 0^+} (\ln \frac{1}{x})^x$

    [1]

13. $\lim_{x\to \infty} (\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x)^x$

    $\left[e^{-\frac{2}{\pi}}\right]$

14. $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^2-1}{x^2})^{x^4}$

$[0]$

15. $\lim_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

$\left[e^3\right]$

16. * $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$

$[1]$

2.10 Derivace implicitně zadané funkce

Pozn.: Viz skripta str. 37-38.

1. Určete derivaci funkce zadané rovnicí $y = x^2$.

$[y' = 2x]$

2. Určete derivaci funkce zadané rovnicí $y^2 = x^3 + 1$.

$\left[y' = \frac{3x^2}{2y}\right]$

3. Určete derivaci funkce zadané rovnicí $2y + \ln y = \cos x$.

$\left[y' = -\frac{y\sin x}{2y+1}\right]$

4. Určete první a druhou derivaci funkce zadané rovnicí $3x^4 - 4y^3 = 1$.

$\left[y' = \frac{x^3}{y^2};\ y'' = \frac{3x^2-2y(y')^2}{y^2} = \frac{3x^2y^3-2x^6}{y^5}\right]$

5. Určete rovnici tečny a normály ge grafu funkce zadané rovnicí $x^2 + y^2 = 25$ v bodech $[-3,4]$, $[5,0]$ a $[0,5]$. Načrtněte si obrázek.

$\left[t_1 : y = \frac{3}{4}x + \frac{25}{4},\ n_1 : y = -\frac{4}{3}x;\ t_2 : x = 5,\ n_2 : y = 0;\ t_3 : y = 5,\ n_3 : x = 0\right]$

2.11 Vyšetřování průběhu funkce

2.11.1 Monotonie

Určete intervaly, na nichž je funkce $f(x)$ rostoucí, resp. klesající:

1. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

$[R : (-1,1), K : (-\infty - 1), (1,\infty)]$

2. $f(x) = x^2 - \ln x^2$

$[R : (-1,0), (1,\infty), K : (-\infty,-1), (0,1)]$

3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

$[R : (e,\infty), K : (0,1), (1,e)]$

2.11.2 Lokální extrémy

Určete lokální extrémy funkce $f(x)$:

1. $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$

$$\left[max : \left[-1, -1 + \tfrac{\pi}{2}\right], min : \left[1, 1 - \tfrac{\pi}{2}\right]\right]$$

2. $f(x) = \ln \cos x$

$$[max : \{[2k\pi, 0], k \in \mathbb{Z}\}]$$

3. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ měla v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ extrém.

$$[a = 2]$$

2.11.3 Globální extrémy

Určete globální extrémy funkce $f(x)$ na intervalu I:

1. $f(x) = x - 1 - \sqrt{x}$, $I = \langle 0, 1\rangle$

$$\left[max : [0, -1], [1, -1], min : \left[\tfrac{1}{4}, -\tfrac{5}{4}\right]\right]$$

2. $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, $I = \langle -1, 1\rangle$

$$\left[max : \left[1, 1 + \tfrac{\pi}{4}\right], min : \left[-1, -1 - \tfrac{\pi}{4}\right]\right]$$

3. $f(x) = x^2 \ln x$, $I = \langle 1, e\rangle$

$$\left[max : \left[e, e^2\right], min : [1, 0]\right]$$

2.11.4 Konvexnost, konkávnost, inflexní body

Určete intervaly, na nichž jsou funkce konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body funkcí:

1. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 5x + 1$

$$[konv : (-\infty, 1), (2, \infty), konk : (1, 2), infl : [1, 3], [2, 7]]$$

2. $f(x) = e^{-2x^2}$

$$\left[konv : (-\infty, -\tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, \infty), konk : (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}), infl : \left[-\tfrac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right], \left[\tfrac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right]\right]$$

3. $f(x) = xe^{-x}$

$$\left[konv : (2, \infty), konk : (-\infty, 2), infl : \left[2, 2e^{-2}\right]\right]$$

2.11.5 Asymptoty

Určete asymptoty funkcí:

1. $f(x) = e^x$

[$bs:$ nejsou ; $ss: y = 0$ pro $-\infty$, pro $+\infty$ není]

2. $f(x) = \frac{x^3}{x^2-5x+6}$

[$bs: x = 2, x = 3$; $ss: y = x + 5$ pro $\pm\infty$]

3. $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}$

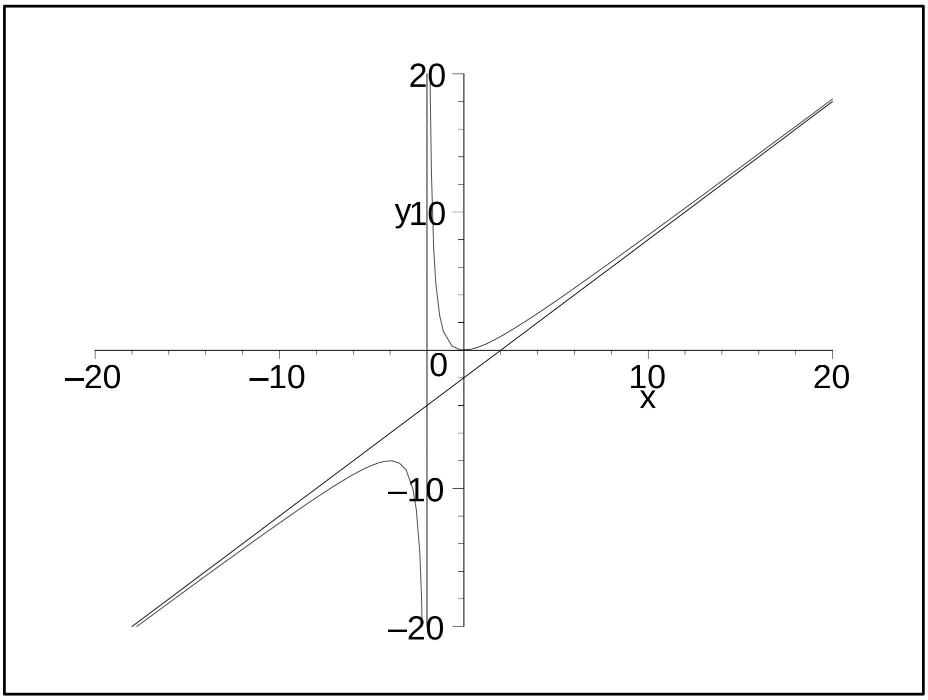
[$bs:$ nejsou (ani $x = 0$); $ss: y = \frac{\pi}{2}$ pro $\pm\infty$]

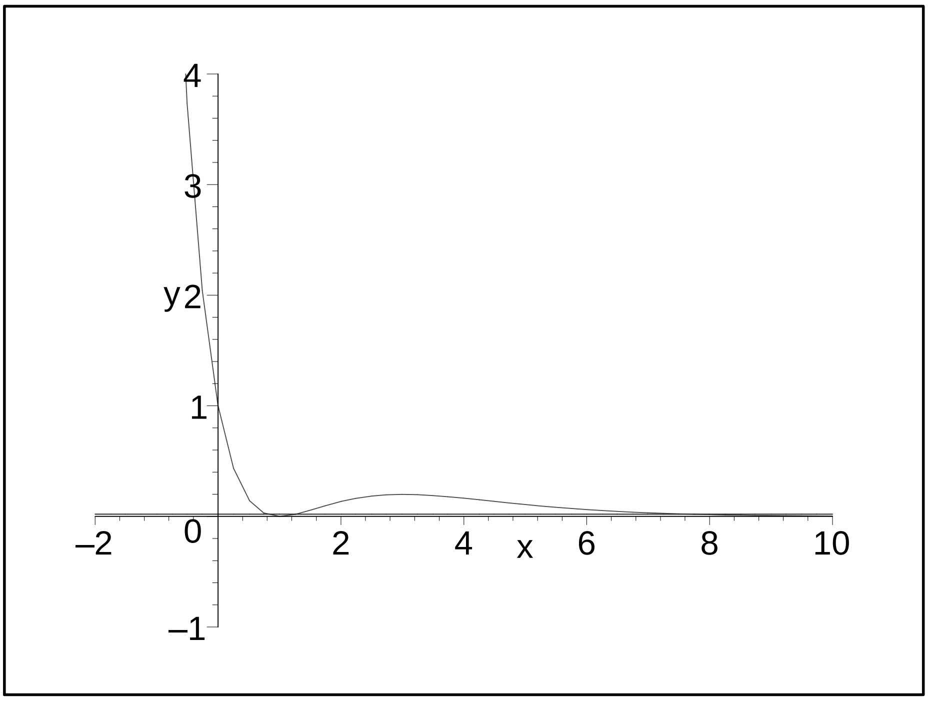
2.11.6 Celkový průběh funkce

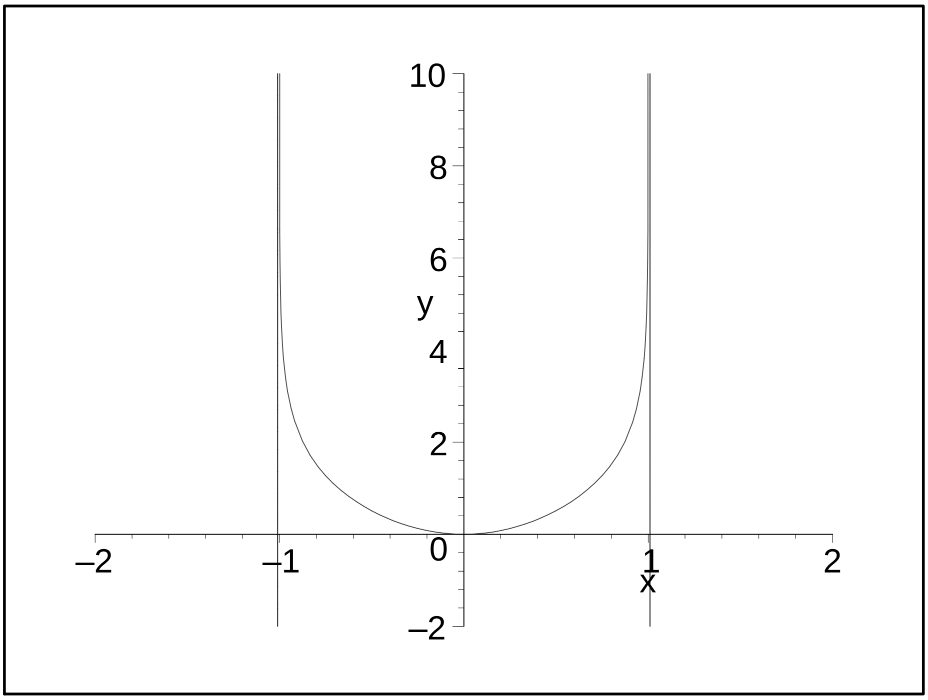
Vyšetřete průběh funkcí (včetně grafu):

1. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$
2. $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$
3. $f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$

(přímky v grafech značí asymptoty)




4
3
y 2
1
0
–1
–2
2
4
x
6
8
10


10
8
6
y
4
2
0
–2
–2
–1
1
x
2

2.12 Diferenciál

Pomocí diferenciálu přibližně určete:

1. $\operatorname{arccotg}(1,02)$

$$\left[\approx \tfrac{\pi}{4} - 0,01 \approx 0,7754 \ (f(x) = ar\operatorname{cotg}(x), x_0 = 1)\right]$$

2. $\sin 29^o$

$$\left[\approx \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \tfrac{\pi}{180} \approx 0,4849 \ \left(f(x) = \sin x, x_0 = \tfrac{\pi}{6}\right)\right]$$

3. $\sqrt{5}$

$$\left[\approx \tfrac{9}{4} = 2.25 \ (f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4)\right]$$

2.13 Taylorův rozvoj

Napište Taylorův polynom stupně n v bodě x_0 funkcí:

1. $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 1$, $n = 5$

$$\left[T_5(x) = 2 + 2(x-1) + (x-1)^2\right]$$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x_0 = 0$, $n = 4$

$$\left[T_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4\right]$$

3. $f(x) = x^3 - 2x + 5$, $x_0 = 1$, $n = 6$

$$\left[T_6(x) = 4 + (x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3\right]$$

Napište Maclaurinův rozvoj funkcí:

1. $f(x) = \sin x$

$$\left[T_n(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\tfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cos\xi \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$

2. $f(x) = \cos x$

$$\left[T_n(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \cos\xi \tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]$$

3. $f(x) = \ln(x+1)$

$$\left[T_n(x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{x^n}{n} + (-1)^{n+2}\tfrac{x^{n+1}}{n+1}\tfrac{1}{(1+\xi)^{n+1}}\right]$$

2.14 Optimalizace

1. Kladné číslo a rozložte na součet dvou nezáporných sčítanců tak, aby jejich součin byl maximální.

   $\left[a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right]$

2. Kladné číslo a rozložte na součet dvou nezáporných sčítanců tak, aby hodnota s součtu jejich n-tých mocnin byla minimální, resp. hodnota S součinu jejich n-tých mocnin byla maximální. Určete tyto hodnoty.

   $\left[s = \frac{a^n}{2^{n-1}};\; S = \left(\frac{a}{2}\right)^{2n}\right]$

3. Určete poměr stran a, b obdélníka, pro nějž platí, že při daném obsahu má nejmenší obvod.

   [$a = b$, tj. čtverec]

4. Určete poměr poloměru r a výšky v rotačního válce, pro nějž platí, že při daném povrchu má největší objem.
   (Pozn.: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$, $V = \pi r^2 v$)

   $[v = 2r]$

5. Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při daném objemu R litrů měla co nejmenší povrch.
   (Pozn.: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$, $V = \pi r^2 v$)

   $\left[r = \sqrt[3]{\frac{R}{2\pi}}dm, v = \sqrt[3]{\frac{4R}{\pi}}dm\right]$

6. Do koule o poloměru R vepište válec s co nejmenším objemem. Určete poloměr r tohoto válce.

   $\left[r = \sqrt{\frac{2}{3}}R\right]$

7. Z plechu tvaru obdélníka o rozměrech 30 x 14 cm vyřežte krabici bez víka o maximálním objemu. Jaké budou rozměry této krabice?

   [24 x 8 x 3 cm]

8. Plotem dlouhým 200 m ohraďte 3 strany obdélníkové parcely (4. stranou parcela přiléhá k plotu již hotovému). Při jakých rozměrech bude mít parcela maximální plošnou výměru?

   [100 x 50 m]

9. Konstruktér plánuje vyrobit krabici tvaru kvádru (tj. má čtvercové dno a víko) o objemu V = 256 litrů, přičemž materiál na výrobu bočních stran stojí 50 Kč/m^2 a materiál na výrobu dna a víka stojí 200 Kč/m^2. Určete rozměry krabice a (= délka hrany dna krabice) a b (= výška krabice) tak, aby materiál pro její výrobu byl co nejlevnější. Kolik bude stát taková krabice?

   [$a = 40$ cm, $b = 160$ cm; cena: 192 Kč]

2.15 Jednoduché slovní úlohy s derivacemi

1. Dívka pouští draka ve výšce 120 m nad zemí. Vítr draka unáší od dívky ve vodorovném směru rychlostí 10 m/s. Jakou rychlostí musí dívka odvíjet provaz v okamžiku, kdy je od ní drak 200 m daleko?

   [8 m/s]

2. Z pásového dopravníku padá písek rychlostí $10\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$ na hromadu ve tvaru kužele. V každém okamžiku platí, že výška tohoto kužele odpovídá $\frac{3}{8}$ průměru podstavy. Jak rychle se mění
   a/ výška hromady,
   b/ poloměr podstavy hromady
   v okamžiku, kdy je aktuální výška kužele 4 m? Odpovědi udejte v cm/min.

   $[11,2\,\mathrm{cm/min}; 14,9\,\mathrm{cm/min}]$

3. Balón tvaru koule je nafukován héliem rychlostí $40\pi\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Jak rychle se zvětšuje poloměr balónu v okamžiku, kdy je jeho hodnota rovna 2 m? Jak rychle roste jeho povrch?

   $\left[2,5\,\mathrm{m/min}; 40\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{min}\right]$

4. Lampa na sloupu veřejného osvětlení svítí ve výšce 20 m nad zemí. Ve stejné výšce ve vzdálenosti 12 m od lampy je puštěn k zemi balónek. Jak rychle se pohybuje stín balónku 1 sekundu poté? Použijte hodnotu gravitační zrychlení $10\,\mathrm{m/s}^2$, tj. vzdálenost balónku od místa puštění v čase t je rovna $5\,t^2$.

   [96 m/s]

5. Hodiny s dvanáctihodnovým ciferníkem ukazují čas 12:20. Jak rychle se v tomto okamžiku mění vzdálenost konce minutové ručičky od horního okraje ciferníku (značka 12 hodin), je-li poloměr hodin 12 cm? Předpokládáme, že tvar ciferníku je ideálního kruh a konec minutové ručičky se dotýká jeho okraje.

   $[\pi\,\mathrm{cm/h}]$

6. Jaká je rychlost klesání hladiny kapaliny uvnitř válcové nádrže o poloměru podstavy r metrů při rovnoměrném vypouštění, když za 1 minutu vyteče 3000 l kapaliny?

   $\left[\frac{3}{\pi r^2}\,\mathrm{m/min}\right]$

7. Vrtulník dálniční hlídky letí 3 km nad rovnou silnicí rychlostí 120 km/h. Pilot zaměří radarem auto jedoucí proti směru letu vrtulníku a naměří, že auto se při vzdušné vzdálenosti 5 km od vrtulníku k němu přibližuje rychlostí 160 km/h. Spočítejte rychlost auta.

   [80 m/min]

8. O dům je opřený žebřík dlouhý 13 stop (ft). Náhle základna žebřku podklouzne a žebřík začne sjíždět k zemi (stále zůstává opřený o dům). Když je základna žebříku 12 stop od domu, klouže od něj rychlostí 5 ft/s. Jak rychle v tomto okamžiku
   a/ klesá vršek žebříku po zdi,
   b/ se mění obsah trojúhelníka vymezeného žebříkem, domem a zemí,
   c/ se mění úhel, který svírá žebřík se zemí?

   $\left[12\,\mathrm{ft/s}; -59,5\,\mathrm{ft}^2/\mathrm{s}; -1\,\mathrm{rad/s}\right]$

3 Integrální počet

3.1 Primitivní funkce

Spočtěte integrály:

1. $\int 3 + x^2\,dx$

$\left[3x + \frac{x^3}{3} + c\right]$

2. $\int (1 - \frac{1}{x^2})\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$

$\left[\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + c\right]$

3. $\int \frac{\sqrt{x} - 2^x x^3 + 3x^2}{x^3}\,dx$

$\left[-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2^x}{\ln 2} + 3\ln x + c\right]$

4. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}\,dx$

$\left[2\frac{(\frac{1}{5})^x}{\ln\frac{1}{5}} - \frac{1}{5}\frac{(\frac{1}{2})^x}{\ln\frac{1}{2}} + c\right]$

5. $\int e^{2x}\,dx$

$\left[\frac{1}{2}e^{2x} + c\right]$

6. $\int \sin kx\,dx$

$\left[-\frac{1}{k}\cos kx + c\right]$

7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,dx$
   (Pozn.: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.)

$[2x - \operatorname{tg} x + c]$

8. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$

$\left[\frac{1}{2}(\operatorname{tg} x + x) + c\right]$

9. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2}\,dx$
   (Pozn.: $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$.)

$[x - \sin x + c]$

10. $\int \sin 6x \cos 2x\,dx$
    (Pozn.: $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.)

$\left[-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{8}\cos 4x + c\right]$

11. $\int \operatorname{tg} x\,dx$

$[-\ln|\cos x| + c]$

12. $\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx$

$\left[\frac{1}{2}\ln\left|x^2+a^2\right|+c\right]$

13. $\int (\frac{5}{2\sqrt{x^2-3}} - (\frac{2}{3})^x)\,dx$

$\left[\frac{5}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| - \frac{(\frac{2}{3})^x}{\ln\frac{2}{3}}+c\right]$

3.2 Metoda Per partes

Spočtěte integrály:

1. $\int (x^2+x)e^x\,dx$

$\left[e^x(x^2-x+1)+c\right]$

2. $\int x^3e^{2x}\,dx$

$\left[e^{2x}(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8})+c\right]$

3. $\int (x^3+x^2)3^x\,dx$

$\left[3^x(\frac{x^3+x^2}{\ln 3}-\frac{3x^2+2x}{\ln^2 3}+\frac{6x+2}{\ln^3 3}-\frac{6}{\ln^4 3})+c\right]$

4. $\int x\cos 2x\,dx$

$\left[\frac{x}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+c\right]$

5. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$

$\left[x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+c\right]$

6. $\int e^x\cos x\,dx$

$\left[\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+c\right]$

7. $\int e^{2x}\sin x\,dx$

$\left[\frac{1}{5}e^x(2\sin x-\cos x)+c\right]$

8. $\int \sin^2 x\cos x\,dx$

$\left[\frac{1}{3}\sin^3 x+c\right]$

9. $\int x^2\ln x\,dx$

$\left[\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+c\right]$

10. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

$\left[-\frac{\ln^2 x+2\ln x+2}{x}+c\right]$

11. $\int \cos^2 x\,dx$

$\left[\frac{1}{2}(x+\cos x\sin x)+c\right]$

3.3 Substituční metoda

Spočtěte integrály (PP ve výsledcích znamená použití metody Per partes):

1. $\int xe^{x^2}\,dx$

$$\left[\tfrac{1}{2}e^{x^2}+c;\ \left|t=x^2\right|\right]$$

2. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$

$$\left[-\tfrac{1}{\ln x}+c;\ |t=\ln x|\right]$$

3. $\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx$

$$\left[\tfrac{1}{4}\sqrt[3]{(1+x^3)^4}+c;\ \left|t=1+x^3\right|\right]$$

4. $\int x^2\cos x^3\,dx$

$$\left[\tfrac{\sin x^3}{3}+c;\ \left|t=x^3\right|\right]$$

5. $\int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\left[-\tfrac{\arccos^3 x}{3}+c;\ |t=\arccos x|\right]$$

6. $\int \sin^5 x\cos^5 x\,dx$

$$\left[\tfrac{\sin^6 x}{6}-\tfrac{\sin^8 x}{4}+\tfrac{\sin^{10} x}{10}+c;\ |t=\sin x|\ \text{nebo}\ -\tfrac{\cos^6 x}{6}+\tfrac{\cos^8 x}{4}-\tfrac{\cos^{10} x}{10}+c;\ |t=\cos x|\right]$$

7. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\,dx$

$$\left[\tfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+c;\ |t=\operatorname{tg} x|\right]$$

8. $\int x^2\arccos x\,dx$

$$\left[\tfrac{x^3}{3}\arccos x-\tfrac{1}{3}\sqrt{1-x^2}+\tfrac{1}{9}\sqrt{(1-x^2)^3}+c;\ \left|PP+t=1-x^2\right|\right]$$

9. $\int \arccos x\,dx$

$$\left[x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c;\ \left|PP+t=1-x^2\right|\right]$$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$

$$\left[\arcsin\tfrac{x}{a}+c;\ \left|t=\tfrac{x}{a}\right|\right]$$

11. $\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$

$$\left[\tfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\tfrac{x}{3}+c;\ \left|t=\tfrac{x}{3}\right|\right]$$

12. $\int -\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

$$\left[\arccos\tfrac{x}{4}+c;\ \left|t=\tfrac{x}{4}\right|\right]$$

13. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$$\left[\tfrac{a^2}{2}(\arcsin\tfrac{x}{a}+\tfrac{x}{a}\sqrt{1-(\tfrac{x}{a})^2})+c;\ |x=a\sin t|\right]$$

14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$

$$\left[(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+c;\ \left|x=t^2+PP\right|\right]$$

3.4 Integrování racionálních lomených funkcí

Spočtěte integrály:

1. $\int \frac{x}{x^3-x^2-4x+4}\,dx$

$$\left[-\tfrac{1}{3}\ln|x-1|-\tfrac{1}{6}\ln|x+2|+\tfrac{1}{2}\ln|x-2|+c\right]$$

2. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x+6\sin x+5}\,dx$

$$\left[\tfrac{1}{4}\ln|1+\sin x|-\tfrac{1}{4}\ln|5+\sin x|+c;\ \text{nejdříve substituce }\ t=\sin x\right]$$

3. $\int \frac{x^4+6x^2+x-2}{x^4-2x^3}\,dx$

$$\left[x-\tfrac{1}{2x^2}-3\ln|x|+5\ln|x-2|+c\right]$$

4. $\int \frac{x^2+x+1}{x^3+x}\,dx$

$$[\ln|x|+\operatorname{arctg}x+c]$$

5. $\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

$$[x+\operatorname{arccotg}\ x+c]$$

6. $\int \frac{2x^3+8x^2+12x+1}{x^2+4x+6}\,dx$

$$\left[x^2+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\tfrac{x+2}{\sqrt{2}}+c\right]$$

7. $\int \frac{4x-10}{x^2-6x+25}\,dx$

$$\left[2\ln\left|x^2-6x+25\right|+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\tfrac{x-3}{4}+c\right]$$

8. $\int \frac{4x-5}{x^2+4x+7}\,dx$

$$\left[2\ln\left|x^2+4x+7\right|+\tfrac{13}{\sqrt{3}}\ \operatorname{arccotg}\tfrac{x+2}{\sqrt{3}}+c\right]$$

9. $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$

$$\left[\tfrac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|-\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\ \operatorname{arccotg}x+c\right]$$

10. $\int \frac{2x^5-7x^4+11x^3-24x^2+27x-16}{x^4-3x^3+3x^2-8x+12}\,dx$

$$\left[x^2-x+\ln|x-2|+\tfrac{\sqrt{11}}{x+\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+x+3\right|+\tfrac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}(\tfrac{2}{\sqrt{11}}(x+\tfrac{1}{2}))+c\right]$$

11. * $\int \frac{2x+4}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$

$$\left[\tfrac{x-3}{4(x^2+2x+5)}+\tfrac{1}{8}\operatorname{arctg}\tfrac{x+1}{2}+c\right]$$

12. * $\int \frac{2x-1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

$$\left[\tfrac{-\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}{x^2+x+1}-\tfrac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+c\right]$$

3.5 Riemannův integrál

Spočtěte určité integrály:

1. $\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{x}\, dx$

$\left[\frac{9\sqrt[3]{3}-3}{4}\right]$

2. $\int_{0}^{2} e^{2x}\, dx$

$\left[\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}\right]$

3. $\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{9-9x^2}}\, dx$

$\left[\frac{\pi}{6}\right]$

4. $\int_{0}^{1} x \operatorname{arctg} x\, dx$

$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$

5. $\int_{0}^{1} x^2 e^x\, dx$

$[e - 2]$

6. $\int_{0}^{1} \frac{x}{e^x}\, dx$

(tip: $\frac{x}{e^x} = x\frac{1}{e^x} = xe^{-x}$ + PP)

$\left[1 - \frac{2}{e}\right]$

7. $\int_{1}^{e} \ln x\, dx$

$[1]$

8. $\int_{-\pi}^{0} \sin^2 x\, dx$

$\left[\frac{\pi}{2}\right]$

9. $\int_{0}^{1} \arcsin x\, dx$

$\left[\frac{\pi}{2} - 1\right]$

10. $\int_{0}^{1} \arccos x\, dx$

$[1]$

11. $\int_{1}^{2} \frac{\ln x}{x}\, dx$

$\left[\frac{\ln^2 2}{2}\right]$

12. $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{x^2+1}\, dx$

$\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$

$\left[1 - \frac{\pi}{4}\right]$

14. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

$[0]$

15. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} \, dx$

$\left[\frac{167}{10} - \frac{21\pi}{4}\right]$

16. $\int_{-1}^1 f(x) \, dx, \; f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}$
(Rada: Rozdělte si integrál na dva, podle vzorečku o záměně součtu integrálů přes sousedící intervaly za integrál přes součet těchto dvou intervalů. Integrál přes "jednobodový interval" $I = 0$ je roven nule, proto se nemusíte bát tento bod vypustit a zbydou integrály přes $\langle -1, 0)$ a $(0, 1\rangle$ z konstantní funkce.)

$[2]$

17. $\int_{-1}^2 sgn(x) \, dx$

$[3]$

3.6 Aplikace integrálu

3.6.1 Plocha mezi grafy

1. Určete obsah podgrafu funkce $y = 1$ na intervalu $\langle 1, 2\rangle$.
(Pozn.: Podgraf je omezen shora grafem funkce a zdola osou x.)

$[1]$

2. Určete obsah podgrafu funkce $y = |x|$ na intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

$[1]$

3. Určete obsah nadgrafu funkce $y = -x$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.
(Pozn."' Plocha musí být kladná, proto musíme počítat "$-\int$". Nadgraf je omezen shora osou x.)

$\left[\frac{1}{2}\right]$

4. Určete velikost plochy omezené grafem funkce $y = \cos x$ a osou x na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$.

$[4]$

5. Určete velikost plochy určené grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2$ a přímkou $x = 0$.

$\left[2 - \frac{1}{\ln 2}\right]$

6. Určete velikost plochy sevřené mezi grafy funkcí $y = 2x - x^2$ a $y = x^2 - 2x$.

$\left[\frac{8}{3}\right]$

7. Určete velikost plochy sevřené mezi grafy funkcí $y = x$ a $y = x^3$.

$\left[\frac{1}{2}\right]$

3.6.2 Délka křivky

1. Určete délku jednotkové půlkružnice.
   (Pozn.: Parametrizace $t \mapsto [\cos t, \sin t]$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.)

   $[\pi]$

2. Určete délku oblouku cykloidy $t \mapsto \left[t - \frac{1}{2}\sin(2t), 1 - \frac{1}{2}\cos(2t)\right]$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$.
   (Pozn.: $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$.)

   $[4]$

3. Určete délku asteroidy $t \mapsto \left[\cos^3 t, \sin^3 t\right]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
   (Pozn.: Počítejte jako 4x délka jednoho oblouku pro $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.)

   $[6]$

4. Určete délku grafu funkce $y = 3$ na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$.

   $[20]$

5. Určete délku grafu funkce $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

   $\left[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\right]$

6. Určete délku grafu funkce $y = x$ mezi body $[0, 0]$ a $\left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$.

   $[2]$

7. * Určete délku grafu funkce $y = \ln x$ na intervalu $\left\langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \right\rangle$.

   $\left[1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}\right]$

3.6.3 Objem rotačního tělesa

1. Určete objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = \cos x$ kolem osy x na intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

   $\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$

2. Určete objem rotačního válce o výšce 10 a poloměru 2.

   $[40\pi]$

3. Určete objem koule o poloměru 3.
   (Pozn.: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.)

   $[36\pi]$

3.6.4 Povrch pláště rotačního tělesa

1. Určete povrch pláště rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x$ kolem osy x na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

$\left[2\sqrt{2}\pi\right]$

2. Určete povrch koule o poloměru r.

$\left[4\pi r^2\right]$

3.7 Nevlastní integrály

Spočtěte integrály:

Pozn.: Postup najdete v Teorii ke cvičení v souboru Integrální počet 6.

1. $\int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx,\ a > 0$

$\left[\frac{1}{a}\right]$

2. $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$[\infty]$

3. $\int_0^1 \ln x\,dx$

$[-1]$

4. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$[\pi]$

5. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$[\pi]$

6. $\int_2^\infty \frac{2}{x^2+x-2}\,dx$

$\left[\frac{2}{3}\ln 2\right]$

7. $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx,\ a > 0$

$\left[\frac{1}{a}\right]$

8. $\int_0^\infty x \sin x\,dx$

$[\infty]$

9. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$

$\left[\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$

4 Nekonečné řady

4.1 Nekonečné číselné řady

Určete součet těchto řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$

$\left[\frac{23}{90}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

$[1 - \sqrt{2}]$

4. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^n}{3^n}$

$\left[-\frac{3}{5}\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2^n}{3^n}$

$\left[\frac{2}{5}\right]$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

[diverguje k $+\infty$]

7. * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

[2]

8. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n}\right)$

[5]

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 3^n}{4^n}$

[−2]

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 4^n - 3^{n+1}}{6^n}$

[9]

Můžou následující řady konvergovat?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}$

[*ne*]

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

[*ano*]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2+1}$

[*ne*]

4.2 Nekonečné řady s nezápornými členy

Pomocí srovnávacího kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

[D (např. $\frac{1}{n}$)]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$

[K (např. $\frac{1}{n^2}$)]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$

(tip: $\ln(n+1) \leq n$)

[D (např. $\frac{1}{n}$)]

Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

[K]

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

[K pro $a > 1$; D pro $a \leq 1$]

Pomocí podílového kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

[K]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

[D]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n}(\sqrt{3})^n}$

[K]

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

[K]

Pomocí odmocninového kritéria rozhodněte o konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$

[K]

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

[K pro $a < 1$, D pro $a > 1$]

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{\operatorname{arctg} n})^n$, $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$

[K pro $a < \frac{\Pi}{2}$, D pro $a > \frac{\Pi}{2}$]

4.3 Alternující číselné řady

Rozhodněte o konvergenci alternujících řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

   $[K]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

   $[D]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n-\ln n}$

   $[K]$

4.4 Absolutně a relativně konvergentní řady

Rozhodněte o absolutní a relativní konvergenci řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

   $[KN]$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$

   $[KA]$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

   $[KN]$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n-5}$

   $[D]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n!}$

   (tip: $|\cos n\pi = 1|$)

   $[KA]$

6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{9n+1}}{\sqrt{4n+1}}$

   $[D]$

Určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ řady konvergují absolutně, relativně, divergují:

1. * $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)^n}{n}$

   [KA pro $|a| < 1$; KN pro $x = -1$; D pro $|a| > 1$ a $x = 1$]

4.5 Mocninné řady

Určete poloměr a obor konvergence mocninných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

$[R = 1;\ I = (-1, 1]]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}x^n$

$[R = 1;\ I = (-1, 1)]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n3^{n-1}}$

$[R = 3;\ I = [-3, 3)]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2(x+2)^n$

$[R = 1;\ I = (-3, -1)]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n$, $a > 1$

$[R = \infty;\ I = (-\infty, \infty)]$

6. $\sum_{n=0}^{\infty}n!\ x^n$

$[R = 0;\ I = \{0\}]$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n}$

$[R = \infty;\ I = (-\infty, \infty)]$

Určete poloměr konvergence a součet mocninných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$

$\left[R = 1; \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(n)^2x^{n-1}$

$\left[R = 1; \frac{1+x}{(1-x)^3}\right]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$[R = 1; \ln(1+x)]$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-1}}{4n-1}$

$\left[R = 1; \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\arctan x\right]$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$

$[R = 1; \ln(x+1) - x]$

Pomocí součtu mocninné řady určete součet číselných řad:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(\frac{1}{4})^{n-1}$

$\left[\frac{80}{27}\right]$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

$[\ln 2]$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

$[\ln 2]$

4.6 Taylorova a Maclaurinova řada

Rozviňte následující funkce do Maclaurinovy řady a určete jejich obor konvergence:

1. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n!};\ x \in \mathbb{R}\right]$

2. $f(x) = x^2 e^x$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!};\ x \in \mathbb{R}\right]$

3. $f(x) = (1+x)e^{-x}$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n+x^{n+1}}{n!};\ x \in \mathbb{R}\right]$

4. $f(x) = \sin x^2$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!};\ x \in \mathbb{R}\right]$

5. $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

(tip: $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$)

$\left[2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};\ |x| < 1\right]$

6. $f(x) = \operatorname{arccotg} x$

$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1};\ |x| \leq 1\right]$

7. $f(x) = \frac{1}{3-2x}$

$\left[\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3}x)^n;\ |x| < \frac{3}{2}\right]$

8. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

$\left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n};\ |x| < 1\right]$

9. $f(x) = \frac{1}{2x^2-6x+4}$

$$\left[\tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\tfrac{1}{2^n})x^n;\ |x|<1\right]$$

Rozviňte následující funkce do Taylorovy řady se středem v bodě x_0. Postupujte podle definice (přes derivace funkce f).

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tfrac{(x-3)^n}{3^{n+1}}\right]$$

2. $f(x) = e^x$, $x_0 = -2$

$$\left[e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(x+2)^n}{n!}\right]$$

3. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\tfrac{(x-1)^n}{n}\right]$$

5 Elementární diferenciální rovnice

Rozhodněte, zda je funkce y pro $x \in I$ řešením dané diferenciální rovnice:

1. $(\sqrt{1+x^2})y'' - x^3(y')^2 + x = 0$, $y = \ln(\sqrt{1+x^2} + x)$, $I = \mathbb{R}$

[*ano*]

2. $(y')^2 + \cos(2x)y'' = 4$, $y = \ln \operatorname{cotg} x$, $I = (0, \frac{\pi}{4})$

[*ne*]

3. $(1+x)y'' + y' = 0$, $y = \ln \sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt$, $I = (-1, 1)$

[*ano*]

5.1 Diferenciální rovnice 1. řádu

5.1.1 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = -\frac{xy}{x+1}$

$[y = C(x+1)e^{-x},\ C \in \mathbb{R}]$

2. $y - y^2 + xy' = 0$

$\left[y = \frac{1}{1-Cx},\ C \in \mathbb{R};\ y = 0\right]$

3. $e^{-y}(1 + y') = 1$

$[e^{-y} = 1 - Ce^x,\ C \in \mathbb{R}]$

4. $y' = e^{x-y}$

$[e^y = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}]$

5. $x(1+y^2)\ dx + y(1+x^2)\ dy = 0$

$\left[y^2 = C(1+x^2) - 1,\ C \in \mathbb{R}^+\right]$

Vyřešte diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

1. $2y - x^3y' = 0$, $y(1) = 1$

$\left[y = e^{1-\frac{1}{x^2}}\right]$

2. $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

$\left[y = 1 - \frac{1}{2+\ln|\sin x|}\right]$

3. $\sin y \cos x \; dy = \cos y \sin x \; dx$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

$$\left[y = \arccos \frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right]$$

Vyřešte homogenní diferenciální rovnice:

1. $xy' + y \ln x = y \ln y$

$$\left[y = xe^{Cx+1}, \; C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$$\left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \left|Cx\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right|), \; C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $(y^2 - x^2) \; dx = 2xy \; dy$

$$\left[y^2 = -x^2 + Cx, \; C \in \mathbb{R}\right]$$

5.1.2 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = -2y$

$$\left[y = Ce^{-2x}, \; C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' = -2y + 6x$

$$\left[y = 3x - \frac{3}{2} + Ce^{-2x}, \; C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y' \cos x = (y + 2\cos x) \sin x$

$$\left[y = \frac{\sin^2 x + C}{\cos x}, \; C \in \mathbb{R}\right]$$

4. $x \; dy + (x^2 - y) \; dx = 0$

$$\left[y = -x^2 + Cx, \; C \in \mathbb{R}\right]$$

Vyřešte diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

1. $y' = 4xy + (2x+1)e^{2x^2}$, $y(0) = 1$

$$\left[y = (x^2 + x + 1)e^{2x^2}\right]$$

2. $y' - 4y = \cos x$, $y(0) = 1$

$$\left[y = \frac{1}{17} \sin x - \frac{4}{17} \cos x + \frac{21}{17} e^{4x}\right]$$

Vyřešte Bernoulliho diferenciální rovnice:

1. $y' = 2xy + 2x^3y^2$

$$\left[y = \frac{1}{(\frac{3}{2}-x^2)e^{x^2}+(1+e^{-x^2})C},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $3x^2y' + xy = y^{-2}$

$$\left[y^3 = \frac{\ln|x|+C}{x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

$$\left[y = x^4(\ln\sqrt{|x|} + C)^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

4. $y\ dy = (\frac{ay^2}{x^2} + \frac{b}{x^2})\ dx,\ a \neq 0$

$$\left[y^2 = -\frac{b}{2a} + Ce^{-\frac{2a}{x}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

Záměnou proměnných vyřešte diferenciální rovnice:

1. $(xy + x^2y^3)y' = 1$

$$\left[x = \frac{1}{2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $2y\ dx + (y^2 - 4x)\ dy = 0$

$$\left[x = (-\tfrac{1}{2}\ln|y| + C)y^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

5.2 Aplikace lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

1. Stroncium ^{90}Sr má poločas rozpadu 29 let. V zamořené oblasti byla zjištěna koncentrace (množství) stroncia v povrchové vrstvě půdy na úrovni 2,5-násobku bezpečnostní hranice. Jak dlouho bude trvat, než úroveň zamoření poklesne alespoň na povolenou bezpečnostní hranici?

$$\left[\frac{Q_0}{2{,}5} = Q_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{29}t};\ t = 38\ let\right]$$

2. Popálenina kůže velikosti $A_0 = 9\ cm^2$ se bude hojit tak, že její plocha klesá s časem jako funkce $A = A(t)$ (A je v cm^2, t je ve dnech), přičemž pro proces hojení lze předpokládat závislost $A'(t) = -0,9e^{-0,1t}$. Jak velká bude popálenina po 5 dnech hojení?

$$\left[A(5) = 5,5\ cm^2\right]$$

3. První měsíc růstu rostliny bavlníku je jeho okamžitá rychlost $W'(t) = 0,21W(t)$, kde $W(t)$ je dosažená hmotnost (mg) rostliny v čase t (dny). Jestliže tedy na začátku měsíce váží taková rostlinka 70 mg, kolik bude vážit na konci tohoto měsíce?

$$[W(30) = 38120\ mg]$$

4. Plná nádrž o objemu 1000 l obsahuje mořskou vodu o koncentraci soli 30 g/l. Do nádrže přitéká rychlostí 1 l/min zředěná mořská voda o koncentraci $c = 20\ g/l$. Po důkladném promíchání vytéká z nádrže roztok rychlostí 2 l/min. Určete množství soli (v g) v nádrži v libovolném čase t a koncentraci soli v nádrži (v g/l) v okamžiku, když nádrž bude z poloviny plná.

$$\left[Q(t) = \frac{t^2}{100} - 40t + 30000;\ C(500) = 25\ g/l\right]$$