Aplikace integrace

PRŮMĚRNÁ FUNKČNÍ HODNOTA $f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$\boxed{f_{avg} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$$

Příklad 1. *Určete průměrnou hodnotu funkce* $f(x) = x^2 - 5x + 6\cos(\pi x)$ *na intervalu* $[-1, 5/2]$

$$\begin{aligned} f_{avg} &= \frac{1}{\frac{5}{2}-(-1)}\int_{-1}^{\frac{5}{2}} x^2 - 5x + 6\cos(\pi x) \\ &= \frac{2}{7}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{6}{\pi}\sin(\pi x)\right]_{-1}^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{12}{7\pi} - \frac{13}{6} \end{aligned}$$

Příklad 2. *Určete průměrnou hodnotu funkce* $f(x) = \sin(2x)e^{1-\cos(2x)}$ *na intervalu* $[-\pi, \pi]$
sub:$u = 1 - \cos(2x)$

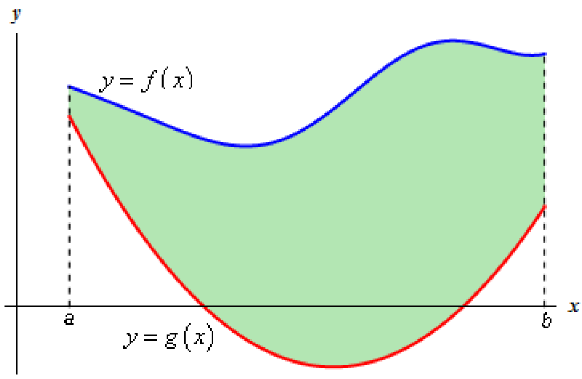
$$\begin{aligned} f_{avg} &= \frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2x)e^{1-\cos(2x)} \\ &= \frac{1}{4\pi}\left[e^{1-\cos(2x)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(Vykreslete si graf a je zřejmé, že je to 0)

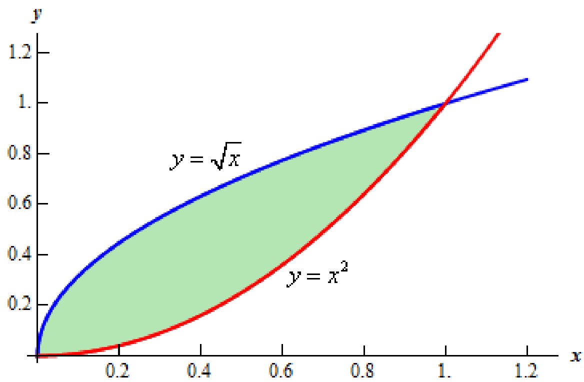
PLOCHA MEZI DVĚMA KŘIVKAMI

Máme-li 2 funkce, pro které $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $[a, b]$, pak obsah plochy mezi křivkami je "integrál horní minus integrál spodní":

$$\boxed{S = \int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x}$$

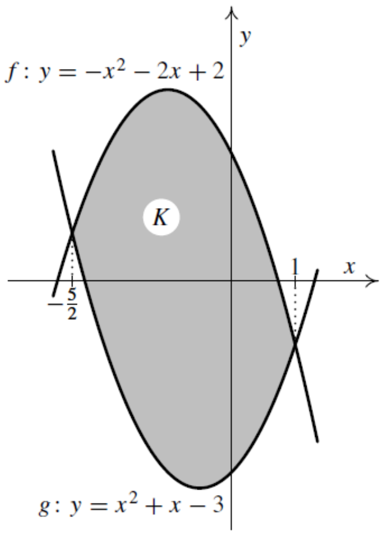


Příklad 3. *Určete plochu mezi křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$.*
Načrtneme obrázek a určíme interval, na kterém budeme hledat rozdíl integrálů:



$$\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 \mathrm{d}x = 1/3$$

Příklad 4. *Určete plochu mezi křivkami $y = x^2 + x - 3$ a $y = -x^2 - 2x + 2$.*



$$\int_{-5/2}^{1} [(x^2 + x - 3) - (-x^2 - 2x + 2)]\mathrm{d}x = \frac{343}{24}$$

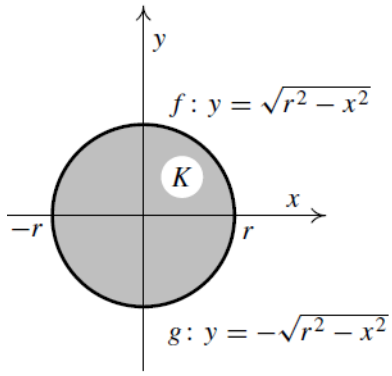
Příklad 5. *Vypočtěte obsah kruhu K o poloměru r.*
Kružnici umístíme do počátku (nemá to na obsah vliv). Rovnice kužnice v počátku: $x^2 + y^2 = r^2$, *odtud*

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Ozn. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. *Obsah kruhu:*

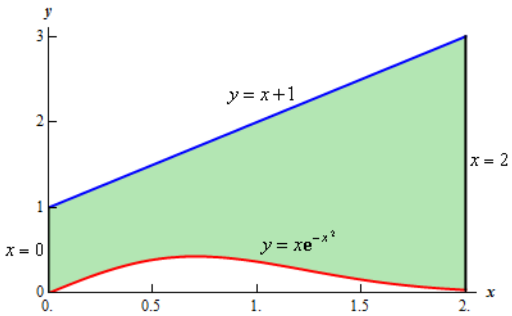
$$\int_{-r}^{r} [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})]\mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r} [\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x = \pi r^2$$

(po substituci $x = r\sin t, dx = r\cos t dt, -r \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2}, r \rightsquigarrow \frac{\pi}{2}$*)*



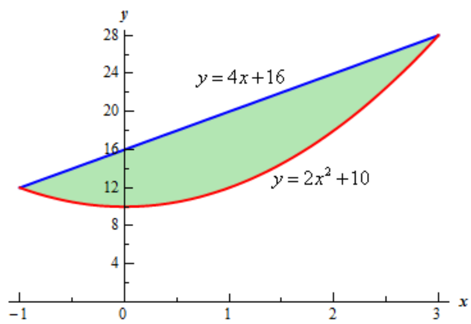
Příklad 6. *Určete plochu mezi křivkami* $y = xe^{-x^2}$, $y = x+1$, $x = 2$ *a* $x = 0$.

$$\int_0^2 x + 1 - xe^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{7}{2} + \frac{e^{-4}}{2}$$



Příklad 7. *Určete plochu mezi křivkami* $y = 2x^2 + 10$ *a* $y = 4x + 16$.

$$\int_{-1}^3 4x + 16 - (2x^2 + 10) \mathrm{d}x = \frac{64}{3}$$



DÉLKA GRAFU

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x}$$

pokud má f na $[a, b]$ spojitou derivaci.

Příklad 8. *Určete délku grafu funkce $f(x) = \ln x$ na intervalu $[\sqrt{3}, \sqrt{15}]$*
$f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} l &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} x \mathrm{d}x \\ &= |x^2 + 1 = t^2, dx = \frac{t}{x} dt, \sqrt{3} \rightsquigarrow 2, \sqrt{15} \rightsquigarrow 4| \\ &= \int_2^4 \frac{t}{t^2 - 1} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

čitatel vydělíme jmenovatelem a dostaneme

$$\frac{t}{t^2 - 1} = 1 + \frac{1}{t^2 - 1}$$

rozložíme na parciální zlomky a celkem máme

$$\begin{aligned} l &= \int_2^4 \frac{t}{t^2 - 1} \mathrm{d}t = \int_2^4 (1 + \frac{1/2}{t - 1} - \frac{1/2}{t + 1}) \mathrm{d}x \\ &= 2 + \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

OBJEM A POVRCH ROTAČNÍHO TĚLESA

$f(x)$ je spojitá, nezáporná na intervalu $[a, b]$. Pak **objem tělesa**, které vznikne rotací funkce kolem osy x je

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x}$$

$f(x)$ je nezáporná na intervalu $[a, b]$ a má zde spojitou derivaci. Pak **povrch tělesa**, které vznikne rotací funkce kolem osy x je

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \mathrm{d}x}$$

- povrch se obtížneji počítá, protože často neumíme integrovat výrazy s odmocninou

Příklad 9. *Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací kolem osy x plochy omezené grafy funkcí $f(x) = 4$ a $g(x) = x^2$.*
Grafy funkcí se protínají v bodech $2, -2$, proto bude interval $[-2, 2]$. Hledaný objem je rozdílem objemů zadaných funkcí:

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_{-2}^{2} 4^2 \mathrm{d}x - \pi \int_{-2}^{2} x^4 \mathrm{d}x = \frac{256\pi}{5}$$

Zkouškové příklady:

Příklad 10. *Určete průměrnou hodnotu funkce $x \ln^2 x$ na intervalech $[1, e], [0, 1] a [0, e]$.*
Výsledek: $[1, e] : \frac{e+1}{4}$,$[0, 1] : \frac{1}{4}$, $[0, e] : \frac{e}{4}$

Příklad 11. *Pomocí vhodného určitého integrálu určete:*

(a) *Objem zmrzliny, která se vejde do kuželovitého kornoutu (tak, aby nic nepřesahovalo ven) o výšce $h = 12cm$ a poloměru "podstavy" $r = 3cm$.*

(b) *Kolik stojí materiál na jeden kornout, jestliže jeho jednotková cena je $2hal/cm2$?*

Řešení:

(a) *objem rotačního tělesa vzniklého rotací přímky $f(x) = \frac{x}{4}$ na intervalu* $[0, 12]$.

$$\pi \int_{0}^{12} (\frac{x}{4})^2 \mathrm{d}x = 36\pi cm^2$$

(b) *Povrch stejného tělesa:*

$$2\pi \int_{0}^{12} \frac{x}{4} \sqrt{1 + (1/4)^2} = 9\sqrt{17}\pi$$

Materiál na jeden kornout stojí $2 * 9\sqrt{17}\pi hal$.

Příklad 12. *Pomocí vhodného určitého integrálu určete vnější plochu obří parabolické antény pro dálkový přenos signálu, která má hloubku $3m$ a jejíž*

horní hrana má rovnici $y = 2px$
Řešení:

$$S = 2\pi \int_0^3 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^3 \sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 4\pi \int_0^3 (x+1)^{1/2}$$

$$= 4\pi \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_0^3 = \frac{56\pi}{3} m^2$$

Příklad 13. *Určete délku řetězovky*

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} prox \in [-1, 1]$$

Řešení:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}}\mathrm{d}x = roznasobit = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \sqrt{(e^x + e^{-x})^2}\mathrm{d}x = e - \frac{1}{e}$$