P…

$y' = \ldots = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$.

Nyní … vyjde

… $= 4\pi r^2$.

Předc … v tomto bodě existu… , který už byl defin… 3.43 nebyly splně… kde $\delta > 0$ je malé … dnota by byla $4\pi r$(… ychom stejný výsle… ▲

Pro…

Uvedeme několik možných zobecnění předchozích výsledků.

1. U… u x. Tedy $0 \leq$ $\leq$ … mající plášť Q. O… a Q_f resp. Q_g je… é vznikne rotací kr…

   Cl… číst ještě obsah dv…

2. Č… popsán parametri… situaci upravit vz…

   … ryze monotónní a … e $t = \varphi^{-1}(x)$, x … $) = \psi[\varphi^{-1}(x)]$. D… padě posledního vz… aci, protože při vy…

   … hu podgrafu P fu… V vznikne rota…

Spočítejt… lové plochy. Uvi… čátku a poloměre… $\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. F… $t)| =$ $= | - r \sin t$…

$m_2(K) =$ …

$m_3(V)$ … $=$

… πr^3.

$$m_2(Q) = 2\pi \int_0 r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}\, dt = \ldots \int_0$$

$$= 2\pi r^2 [-\cos t]_0^{\pi} = 4\pi r^2.$$

Příklady k procvičení OBSAH PLOCHY

!

1. Určete obsah rovinné plochy ohraničené křivkami:

a) $y = 0, x = -1, y = x^2$, b) $y = e^x, y = e^{-x}, x = 1$,

c) $y = 4 - x^2, y = 0$, d) $yx = 1, x = 1, x = 3, y = 0$

e) $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$, f) $y(1 + x^2) = 1, y = \frac{x^2}{2}$,

g) $y = \ln x, x = 5, x = 7, y = 0$, h) $y = |\log x|, x = \frac{1}{10}, x = 10, y = 0$,

i) $y = -x^2 + 4x - 2, x + y = 2$, j) $y = \arcsin x, x = 0, x = 1$,

k) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4, x = -1, x = 2, y = 0$,

l) $x = \frac{4}{y}, y = 1, y = 4, x = 0$, m) $y = \ln x, y = \ln 9, y = \ln 3, x = 0$,

n) $y = x \sin x, x \in \langle k\pi, (k+1)\pi\rangle, y = 0$.

DÉLKA GRAFU

2. Určete obsah rovinné plochy ohraničené křivkami:

a) $y = 1 - x,\ y^2 + x^2 = 1,\ 0 \leqq x,\ y > 0$,
b) $x^2 = y,\ y^2 = x$,
c) $y = x^2 - x - 6,\ y = -x^2 + 5x + 14$,
d) $yx = 4,\ x + y = 5$,
e) $y = 0,\ y = \mathrm{e}^{-x}\sin x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$,
f) $y = \ln^2 x,\ y = \ln x$,
g) $y = |\ln x|,\ x = \frac{1}{\mathrm{e}},\ x = \mathrm{e}^2,\ y = 0$,
h) $y = \frac{2}{1+x^2},\ y = x^2$,
i) $y = x^3 + x^2 - 6x,\ y = 0,\ x \in \langle -3, 3\rangle$,
j) $4x^2 + 9y^2 = 36$,
k) $y = \frac{x^2 - 10x + 34}{5},\ y = \frac{10 - 3x^2 + 18x}{5}$,
l) $y = 6x - x^2,\ y = 0$,
m) $x^2 + y^2 = 16,\ y^2 = 6x,\ x \geqq 0$,
n) $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$,
o) $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0$,
p) $y^2 = x^3,\ y = 8$.

3. Určete délku oblouku rovinné křivky:

a) $y = \frac{5(\mathrm{e}^{x/5} + \mathrm{e}^{-x/5})}{2},\ x \in \langle 0, 10\rangle$,
b) $y^3 = x^2,\ x \in \langle 0, 1\rangle$,
c) $y = \sqrt{x - x^2} - \arcsin\sqrt{x},\ x \in \langle 0, 1\rangle$,
d) $y = \arcsin \mathrm{e}^{-x},\ x \in \langle 0, 1\rangle$,
e) $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0$, (cykloida),
f) $x = r(\cos t + t\sin t),\ y = r(\sin t - t\cos t),\ r > 0,\ t \in \langle 0, \pi\rangle$,
g) $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ a > 0$, (asteroida),
h) $y^2 = (x+1)^3,\ x \leqq 4$, (semikubická parabola),
i) $y = \ln\frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1},\ x \in \langle 1, 2\rangle$,
j) $y = \ln\sin x,\ x \in \left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$,
~~k) $x = 2a(1 + \cos t)\cos t,\ y = 2a(1 + \cos t)\sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a > 0$, (kardioida),~~
l) $x = \frac{t^6}{6},\ y = 2 - \frac{t^4}{4}$, mezi průsečíky s osami souřadnic.

4. Určete délku oblouku prostorové křivky:

a) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ a, b > 0$, (jeden závit šroubovice),
b) $x = t,\ y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3},\ z = \frac{1}{2}t^2,\ t \in \langle 0, 1\rangle$,
c) $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 4\sin\frac{t}{2},\ t \in \langle 0, \pi\rangle$,
d) $x = \mathrm{e}^t,\ y = \mathrm{e}^{-t},\ z = t\sqrt{2},\ t \in \langle 0, 1\rangle$.

OBJEM, POVRCH ROTAČ. TĚLESA

5. Určete objem tělesa, které vznikne rotací podgrafu dané funkce k či plochy P kolem osy x:

a) $k: y = \frac{a}{2}(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a}),\ a > 0,\ y = 0,\ x \in \langle -4, 4\rangle$, (rotace řetězovky),
b) $P: xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$,
c) $P: y = -x^2 + 1,\ y = -2x^2 + 2$,
d) $P: b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,\ a, b > 0,\ y \geqq 0$,
e) $k: x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ a > 0,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, (cykloida),
f) $P: x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},\ y \geqq 0$, (asteroida),
g) $k: y = \frac{1}{1+x^2},\ x = -1,\ x = 1$,
h) $P: y^2 = 5x,\ x = 8$,
i) $k: x = t^2 - 1,\ y = t - t^3,\ t \in \langle 0, 1\rangle$,
j) $k: y = \sin x,\ x \in \langle 0, \pi\rangle$,
k) $k: x^2 + y^2 = 25,\ y \geqq 0$,
l) $P: y^2 = x,\ y = x^2,\ y \geqq 0$.

6. Určete obsah pláště tělesa, které vznikne rotací podgrafu dané funkce k či plochy P kolem osy x:

a) $P: y^2 = 4ax,\ y \geqq 0,\ x = 3a,\ a > 0$,
b) $P: y^2 = x,\ y = x^3$,
c) $k: y = 4 + x,\ x \in \langle -4, 2\rangle$,
d) $k: y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}),\ x \in \langle 0, 1\rangle$,
e) $P: (y-1)^2 + x^2 = 1$, (povrch anuloidu),
f) $P: 9ay^2 = x(3a - x)^2,\ a > 0,\ y \geqq 0$, (mezi průsečíky s osou x).

7. Vypočtěte obsah pláště a objem následujících rotačních těles:

a) rotační válec o poloměru podstavy $r > 0$ a výšce $v > 0$,
b) rotační kužel o poloměru podstavy $r > 0$ a výšce $v > 0$,
c) rotační komolý kužel o poloměrech podstav $r_1 > r_2 > 0$ a výšce $h > 0$,
d) kulová úseč o výšce $v > 0$ z koule o poloměru $r > 0,\ 0 < v < 2r$,
e) dutý válec o vnějším poloměru r_1 a vnitřním poloměru $r_2,\ r_1 > r_2 > 0$, a výšce $v > 0$,
f) anuloid (vznikne rotací kruhu o poloměru r a středu $[0, R],\ R > r > 0$, kolem osy x).

Klíč k příkladům k procvičení

1. a) $\frac{1}{3}$, b) $\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2$, c) $\frac{32}{3}$, d) $\ln 3$,
e) $\frac{16}{3}$, f) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$, g) $7\ln 7 - 5\ln 5 - 2$, h) $\frac{9{,}9\ln 10 - 8{,}1}{\ln 10}$,
i) $\frac{9}{2}$, j) $\frac{\pi}{2} - 1$, k) $\frac{9}{4}$, l) $8\ln 2$,
m) 6, n) $(2k+1)\pi$.

2\. a) $\dfrac{\pi-2}{4}$, b) $\dfrac{1}{3}$, c) $\dfrac{343}{3}$, d) $\dfrac{15}{2}-8\ln 2$,

e) $\dfrac{1+e^{-\pi}}{2}$, f) $3-e$, g) $2-\dfrac{2}{e}+e^2$, h) $\pi-\dfrac{2}{3}$,

i) 18, j) 6π, k) $\dfrac{50}{3}$, l) 36,

m) $\dfrac{4}{3}(\sqrt{3}+4\pi)$, n) $\dfrac{125}{6}$, o) $\dfrac{16}{3}$, p) 19.2.

3\. a) $\dfrac{5}{2}(e^2-e^{-2})$, b) $\dfrac{8}{27}\left(\dfrac{13\sqrt{13}}{8}-1\right)$, c) 2,

d) $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$, e) $8a$, f) $\dfrac{\pi^2 r}{2}$,

g) $6a$, h) $\dfrac{670}{27}$, i) $\ln\dfrac{e^2+1}{e}$,

j) $\dfrac{1}{2}\ln 3$, k) $16a$, l) $\dfrac{13}{3}$.

4\. a) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$, b) $\dfrac{3}{2}$, c) 2π, d) $e-e^{-1}$.

5\. a) $\dfrac{\pi a^3}{4}(e^{8/a}-e^{-8/a})+4\pi a^2$, b) 12π, c) $\dfrac{16}{15}\pi$, d) $\dfrac{4}{3}\pi ab^2$,

e) $5\pi^2 a^3$, f) $\dfrac{32a^3}{105}\pi$, g) $\dfrac{\pi}{4}(\pi+2)$, h) 160π,

i) $\dfrac{\pi}{12}$, j) $\dfrac{\pi^2}{2}$, k) $\dfrac{500}{3}\pi$, l) $\dfrac{3}{10}\pi$.

6\. a) $\dfrac{56\pi a^2}{3}$, b) $\dfrac{\pi}{54}\left(20\sqrt{10}+45\sqrt{5}-11\right)$, c) $36\sqrt{2}\pi$,

d) $\dfrac{\pi}{4}(e^2-e^{-2}+4)$, e) $4\pi^2$, f) $3\pi a^2$.

7\. a) $f(x)=r,\ x\in\langle 0,v\rangle,\ m_2(Q)=2\pi rv,\ m_3(V)=\pi r^2 v$,

b) $f(x)=\dfrac{r}{v}x,\ x\in\langle 0,v\rangle,\ m_2(Q)=\pi r\sqrt{r^2+v^2}=\pi rs$, kde $s=\sqrt{r^2+v^2}$,
$m_3(V)=\dfrac{1}{3}\pi r^2 v$,

c) $f(x)=\dfrac{r_1-r_2}{v}x+r_2,\ x\in\langle 0,v\rangle,\ m_2(Q)=\pi(r_1+r_2)s$, kde
$s=\sqrt{v^2-(r_1-r_2)^2},\ m_3(V)=\dfrac{\pi v}{3}(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)$,

d) $f(x)=\sqrt{r^2-v^2},\ x\in\langle r-v,r\rangle,\ m_2(Q)=2\pi rv,\ m_3(V)=\dfrac{1}{3}\pi v^2(3r-v)$,

e) $f(x)=r_1,\ g(x)=r_2,\ x\in\langle 0,v\rangle,\ m_2(Q)=2\pi v(r_1+r_2)$,
$m_3(V)=\pi v(r_1^2-r_2^2)$,

f) $f(x)=R+\sqrt{r^2-x^2},\ g(x)=R-\sqrt{r^2-x^2},\ m_2(Q)=4\pi^2 rR$,
$m_3(V)=2\pi^2 Rr^2$.

Pro lepší geometrickou představu uvádíme obrázky některých křivek a jedné plochy, které se v … viz obr. 3.25. Ozn…

3.6.…

Jak … dy se pomocí urči… např. z hustoty hmo… řech souřadni- cích… jný integrál, se kter… ázky z mecha- niky…

… ádět, to je úko- lem … eré jsou absol- ven… ho integrálu se setk…

Hm…

Pře… ní. Naším cílem bu… modelem drátu je … vanou v bodech kři… čme $T=[\xi,\eta]$ těž…

Nejprve si všimneme případu, kdy křivka C je dána parametrickými rovnicemi

$$C:\ \begin{array}{l} x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{array}\qquad t\in\langle\alpha,\beta\rangle. \tag{3.28}$$

Funkce $\rho(t)$ udává délkovou hustotu v bodě křivky $[\varphi(t),\psi(t)]$.

Věta 3.48. *Nechť funkce $\varphi(t)$ a $\psi(t)$ mají spojité derivace na intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ a funkce $\rho(t)$ je na tomto intervalu spojitá a nezáporná.*

Pak křivka C mající parametrické rovnice (3.28) a délkovou hustotu $\rho(t)$ má hmotnost

$$M(C)=\int_\alpha^\beta \rho(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt. \tag{3.29}$$