Domácí cvičení 8

(primitivní funkce)

8/1) Najděte derivace následujících funkcí:

a) $f(x) = \ln 3x$, b) $f(x) = \ln \dfrac{x}{3}$, c) $f(x) = \ln(3x+6)$, d) $f(x) = \ln \dfrac{x+6}{3}$,

e) $f(x) = \ln 5x$, f) $f(x) = \ln \dfrac{x}{5}$, g) $f(x) = \ln(5x-8)$, h) $f(x) = \ln \dfrac{x-8}{5}$,

i) $f(x) = \ln(-2x)$, j) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{-2}\right)$, k) $f(x) = \ln(-2x+5)$, l) $f(x) = \ln \dfrac{x+5}{-2}$.

(Praxe v určování derivací funkcí tohoto typu se vám bude velmi hodit při hledání primitivních funkcí.)

8/2) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int x^2(2x^2-1)^2\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)^2 \mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int (5^x + 2\cdot 3^{-x} - 4\cos x)\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{5+5x^2}\,\mathrm{d}x$

8/3) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,(x^3-2x)\,\mathrm{d}x$

8/4) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \sin 7x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \cos(-8x)\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \cosh 6x\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 3x}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2(-5x)}\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(-2x)^2}}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{7}\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\frac{x}{-2}}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \cos\left(\frac{x}{-8}\right)\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \cosh\frac{x}{6}\,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{-5}\right)}\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x$, p) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{-2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$

8/5) Vypočtěte (pomocí lineárních substitucí, tedy bez umocnění v integrandu!):

a) $\displaystyle\int (2x+1)^3\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (1-7x)^8\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \left(\frac{4-x}{3}\right)^2 \mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \left(5+\frac{x}{4}\right)\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+1)^3}\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{1}{(1-7x)^8}\,\mathrm{d}x$, g) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(\frac{4-x}{3}\right)^2}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \frac{1}{\left(5+\frac{x}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$,

i) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}x$, j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+(1-7x)^2}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \sin\left(\frac{4-x}{3}\right)\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2\left(5+\frac{x}{4}\right)}\,\mathrm{d}x$

8/6) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int (5x^4+6x^2-6x)\,\ln 4x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (2x^2-3x)\,\sin\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int (x^2+5)\,\cos 2x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int (-x^2+4x-7)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$

– –

Výsledky:

8/1) a) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, b) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, c) $f'(x) = \dfrac{3}{3x+6}$, d) $f'(x) = \dfrac{1}{x+6}$,

e) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, f) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, g) $f'(x) = \dfrac{5}{5x-8}$, h) $f'(x) = \dfrac{1}{x-8}$,

i) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, j) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, k) $f'(x) = \dfrac{-2}{-2x+5}$, l) $f'(x) = \dfrac{1}{x+5}$.

8/2) a) $\dfrac{4}{7}\,x^7 - \dfrac{4}{5}\,x^5 + \dfrac{1}{3}\,x^3 + c$ na $\mathbb{R}$ $\Big($ integrand roznásobte $\Big)$

b) $\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - 12\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{x^2} + c$ na $(0,\infty)$ $\Big($ integrand roznásobte a odmocniny převeďte na mocniny $\Big)$

c) $\dfrac{3}{2}\arcsin x + c$ na $(-1,1)$ $\Big($ ve jmenovateli vytkněte $2=\sqrt{4}$ ven z odmocniny $\Big)$

d) $\dfrac{5^x}{\ln 5} - 2\dfrac{3^{-x}}{\ln 3} - 4\sin x + c$ na $\mathbb{R}$

e) $\dfrac{1}{5}(x + 2\operatorname{arctg} x) + c$ na $\mathbb{R}$ $\Big($ použijte přepis integrandu $f(x) = \dfrac{1}{5}\,\dfrac{x^2+3}{1+x^2} = \dfrac{1}{5}\Big(1 + \dfrac{2}{1+x^2}\Big)$ $\Big)$

8/3) a) $\dfrac{x^2}{2}\,\ln x - \dfrac{x^2}{4} + c$ na $(0,\infty)$ $\Big($ $1\times$ per partes, derivujeme logaritmus $\Big)$

b) $\mathrm{e}^x\,(x^3 - 3x^2 + 4x - 4) + c$ na $\mathbb{R}$ $\Big($ $3\times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom $\Big)$

8/4) Z prostorových důvodů je uvedena vždy jen jedna z primitivních funkcí (pro k vždy platí $k\in\mathbb{Z}$):

a) $-\dfrac{1}{7}\cos 7x$ na $\mathbb{R}$,
b) $-\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2x}$ na $\mathbb{R}$,
c) $-\dfrac{1}{8}\sin(-8x)$ na $\mathbb{R}$,
d) $\dfrac{1}{6}\sinh 6x$ na $\mathbb{R}$,
e) $\dfrac{1}{3}\operatorname{tg} 3x$ na $(-\dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6} + k\dfrac{\pi}{3})$,
f) $\dfrac{1}{5}\operatorname{cotg}(-5x)$ na $(k\dfrac{\pi}{5}, (k+1)\dfrac{\pi}{5})$,
g) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x$ na $\mathbb{R}$,
h) $-\dfrac{1}{2}\arcsin(-2x)$ na $(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$,
i) $-7\cos\dfrac{x}{7}$ na $\mathbb{R}$,
j) $-2\,\mathrm{e}^{\frac{x}{-2}}$ na $\mathbb{R}$,
k) $-8\sin\left(\dfrac{x}{-8}\right)$ na $\mathbb{R}$,
l) $6\sinh\dfrac{x}{6}$ na $\mathbb{R}$,
m) $3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$ na $(-\dfrac{3\pi}{2} + 3k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 3k\pi)$,
n) $5\operatorname{cotg}\big(\dfrac{x}{-5}\big)$ na $(5k\pi, 5(k+1)\pi)$,
o) $3\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)$ na $\mathbb{R}$,
p) $-2\arcsin\big(\dfrac{x}{-2}\big)$ na $(-2,2)$

$\Big($ Zkuste integrály ještě jednou přepočítat bez vypisování substituce. Např. v a) můžete uvažovat takto: Primitivní funkcí k funkci $\sin t$ je funkce $-\cos t$, primitivní funkcí k funkci $\sin 7x$ tedy bude nějaký násobek funkce $-\cos 7x$. Kdybychom funkci $-\cos 7x$ zderivovali, dostali bychom funkci $7\sin 7x$. My však máme z této funkce jen sedminu, tedy primitivní funkcí bude sedmina funkce $-\cos 7x$. (Nebo: „Když se při derivování konstantou u x násobí, musí se při integraci, která je inverzní operací k derivaci, konstantou u x vydělit“.) $\Big)$

8/5) Z prostorových důvodů je uvedena vždy jen jedna z primitivních funkcí (pro k platí $k\in\mathbb{Z}$):

a) $\dfrac{1}{8}\,(2x+1)^4$ na $\mathbb{R}$,
b) $-\dfrac{1}{63}(1-7x)^9$ na $\mathbb{R}$,
c) $-\left(\dfrac{4-x}{3}\right)^3$ na $\mathbb{R}$,
d) $2\left(5 + \dfrac{x}{4}\right)^2$ na $\mathbb{R}$,
e) $-\dfrac{1}{4}\,\dfrac{1}{(2x+1)^2}$ na $(-\infty, -\dfrac{1}{2})$ a na $(-\dfrac{1}{2}, \infty)$,
f) $\dfrac{1}{49}\,\dfrac{1}{(1-7x)^7}$ na $(-\infty, \dfrac{1}{7})$ a na $(\dfrac{1}{7}, \infty)$,
g) $3\dfrac{1}{\left(\frac{4-x}{3}\right)}$ na $(-\infty, 4)$ a na $(4,\infty)$,
h) $4\ln\left|5 + \dfrac{x}{4}\right|$ na $(-\infty, -20)$ a na $(-20, \infty)$,
i) $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x+1}$ na $\mathbb{R}$,
j) $-\dfrac{1}{7}\operatorname{arctg}(1-7x)$ na $\mathbb{R}$,
k) $3\cos\left(\dfrac{4-x}{3}\right)$ na $\mathbb{R}$,
l) $4\operatorname{tg}\left(5 + \dfrac{x}{4}\right)$ na $((4k-2)\pi - 20, (4k+2)\pi - 20)$

$\Big($ Jako v předchozím příkladu zkuste integrály ještě jednou přepočítat bez vypisování substituce. $\Big)$

8/6) a) $(x^5 + 2x^3 - 3x^2)\ln 4x - \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + c$ na $(0,\infty)$ $\Big($ $1\times$ per partes, derivujeme logaritmus $\Big)$

b) $(-6x^2 + 9x + 108)\cos\dfrac{x}{3} + (36x - 27)\sin\dfrac{x}{3} + c$ na $\mathbb{R}$ $\Big($ $2\times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom $\Big)$

c) $\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{9}{4}\right)\sin 2x + \dfrac{x}{2}\cos 2x + c$ na $\mathbb{R}$ $\Big($ $2\times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom $\Big)$

d) $(-2x^2 + 16x - 46)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + c$ na $\mathbb{R}$ $\Big($ $2\times$ per partes, derivujeme pokaždé polynom $\Big)$