Domácí cvičení 9

(integrace racionálních funkcí)

9/1) Rozložte funkci $R(x)$ na součet polynomu a jednoduchých (parciálních) zlomků nejdříve bez pomoci zakrývacího pravidla, pak s jeho pomocí, víte-li, že jmenovatel má alespoň jeden celočíselný kořen:

$$R(x) = \frac{2x^5 - 4x^4 - 7x^3 + 6x^2 - 10x - 17}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}.$$

9/2) Rozložte (kde to je možné, použijte zakrývací pravidlo):

$$\text{a) } R(x) = \frac{-4x^4 + 22x^3 - 43x^2 + 48x - 18}{(x^2 + 2x + 1)(x - 2)^3}, \qquad \text{b) } R(x) = \frac{3x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x + 3}{(x^2 + 2x + 5)(x^4 + 2x^2 + 1)}.$$

9/3) Uveďte tvar, v kterém je nutno hledat rozklad funkce $R(x)$ na jednoduché zlomky, a koeficienty, které lze najít pomocí zakrývacího pravidla, spočítejte:

$$\text{a) } R(x) = \frac{9x^4 - 18x^2 - 3x - 24}{(x^3 - 1)^2(x + 2)}, \qquad \text{b) } R(x) = \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 10}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2)(x^3 - 4x^2 + 5x)}.$$

9/4) Vypočtěte:

$$\text{a)} \int \frac{x^2 + 19x + 42}{(x^2 - 9)(x + 3)}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{b)} \int \frac{3x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{c)} \int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{d)} \int \frac{x^3 + 2x^2 + 8}{x^5 + 4x^3}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{e)} \int \frac{4x + 5}{4x^2 + 4x + 2}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{f)} \int \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 5}\,\mathrm{d}x,$$

$$\text{g)} \int \frac{2x + 5}{x^2 + 3x + 9}\,\mathrm{d}x, \qquad \text{h)} \int \frac{-x^2 - 15x + 25}{(x + 1)(x^2 - 4x + 8)}\,\mathrm{d}x.$$

— —

Výsledky:

9/1)

$$R(x) = 2x^2 + 3 + \frac{5x - 35}{(x - 3)(x + 2)(x - 1)} = 2x^2 + 3 + \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1} =$$

$$= 2x^2 + 3 - \frac{2}{x - 3} - \frac{3}{x + 2} + \frac{5}{x - 1} \qquad (x \neq -2,\ 1,\ 3),$$

zakrývací pravidlo lze použít k určení všech koeficientů

$$\left(A = \frac{5 \cdot 3 - 35}{(3 + 2)(3 - 1)}, \quad B = \frac{5 \cdot (-2) - 35}{(-2 - 3)(-2 - 1)}, \quad C = \frac{5 \cdot 1 - 35}{(1 - 3)(1 + 2)} \right)$$

9/2) a)

$$R(x) = \frac{-4x^4 + 22x^3 - 43x^2 + 48x - 18}{(x + 1)^2(x - 2)^3} = \frac{A}{(x + 1)^2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x - 2)^3} + \frac{D}{(x - 2)^2} + \frac{E}{x - 2} =$$

$$= \frac{5}{(x + 1)^2} - \frac{3}{x + 1} + \frac{2}{(x - 2)^3} - \frac{1}{x - 2} \qquad (x \neq -1,\ 2),$$

zakrývací pravidlo lze použít k určení koeficientů A a C

$$\left(A = \frac{-4 \cdot (-1)^4 + 22 \cdot (-1)^3 - 43 \cdot (-1)^2 + 48 \cdot (-1) - 18}{(-1 - 2)^3},\ C = \frac{-4 \cdot 2^4 + 22 \cdot 2^3 - 43 \cdot 2^2 + 48 \cdot 2 - 18}{(2 + 1)^2} \right)$$

b) $R(x) = \dfrac{3x^4 - x^3 + 4x^2 - 5x + 3}{(x^2+2x+5)(x^2+1)^2} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2x+5} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \dfrac{Ex+F}{x^2+1} =$

$= \dfrac{3}{x^2+2x+5} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2} \qquad (x \in \mathbb{R}),$

zakrývací pravidlo nelze použít k určení žádného koeficientu.

9/3) a) $R(x) = \dfrac{9x^4 - 18x^2 - 3x - 24}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2(x+2)} = \dfrac{A}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2} + \dfrac{Ex+F}{x^2+x+1} + \dfrac{G}{x+2},$

$A = -\dfrac{4}{3}, \quad G = \dfrac{2}{3} \qquad (x \neq 1,\ -2),$

b) $R(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x - 10}{(x-2)^2x^3(x^2-4x+5)} = \dfrac{A}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x^2} + \dfrac{E}{x} + \dfrac{Fx+G}{x^2-4x+5},$

$A = 2, \quad C = -\dfrac{1}{2} \qquad (x \neq 0,\ 2).$

9/4) I je hledaný integrál:

a) $I = \displaystyle\int \frac{x^2+19x+42}{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{(x+3)^2} - \frac{2}{x+3} + \frac{3}{x-3} \right) \mathrm{d}x =$

$= -\dfrac{1}{x+3} - 2\ln|x+3| + 3\ln|x-3| + c \qquad$ na $(-\infty,-3)$, na $(-3,3)$ a na $(3,\infty)$,

b) $I = \displaystyle\int \frac{3x^3+2x^2+3x+1}{x^2(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) \mathrm{d}x =$

$= -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{2}{x+1} + c \qquad$ na $(-\infty,-1)$, na $(-1,0)$ a na $(0,\infty)$,

c) $I = \displaystyle\int \frac{(x^2+1)-x}{(x^2+1)x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} \right) \mathrm{d}x = \ln|x| - \operatorname{arctg} x + c \qquad$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$,

d) $I = \displaystyle\int \frac{x^3+2(x^2+4)}{x^3(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x^2+4} + \frac{2}{x^3} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2} + c \qquad$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$,

e) $I = \displaystyle\int \left(\frac{1}{2}\frac{8x+4}{4x^2+4x+2} + \frac{3}{(2x+1)^2+1} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(4x^2+4x+2) + \frac{3}{2}\operatorname{arctg}(2x+1) + c \qquad$ na $\mathbb{R}$,

f) $I = \displaystyle\int \left(\frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5} - 4\frac{1}{(x+1)^2+4} \right) \mathrm{d}x = \int \frac{3}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$

$= \dfrac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - 2\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} + c \qquad$ na $\mathbb{R}$,

g) $I = \displaystyle\int \left(\frac{2x+3}{x^2+3x+9} + \frac{2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}} \right) \mathrm{d}x = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+9}\,\mathrm{d}x + \frac{8}{27}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$

$= \ln(x^2+3x+9) + \dfrac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+3}{3\sqrt{3}} + c \qquad$ na $\mathbb{R}$,

h) $I = \displaystyle\int \left(\frac{3}{x+1} + \frac{-4x+1}{x^2-4x+8} \right) \mathrm{d}x = \int \left(\frac{3}{x+1} - 2\frac{2x-4}{x^2-4x+8} - 7\frac{1}{(x-2)^2+4} \right) \mathrm{d}x =$

$= 3\ln|x+1| - 2\ln(x^2-4x+8) - \dfrac{7}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{2} + c \qquad$ na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,\infty)$

(ve variantách e) – h) jsme využili toho, že kvadratické výrazy v argumentech logaritmů jsou kladné).