Domácí cvičení 10

(substituce vedoucí na integraci racionální funkce)

U příkladů na integraci funkce racionální v sinech a kosinech doporučuji použít sránky přednášek [P56] - [P58].

10/ 1) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \cos^5 x \sin^2 x \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^7 x \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$.

10/ 2) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{3\,\mathrm{e}^{4x} - 7\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x} - 4\,\mathrm{e}^{2x} + 3} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2x} + 4\,\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1} \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x} + 4\,\mathrm{e}^{2x} + 3\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{3x} + 6\,\mathrm{e}^{2x} + 9\,\mathrm{e}^{x} + 4} \,\mathrm{d}x$.

10/ 3) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x + 3}{x(\ln^2 x + 4\ln x + 5)} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{3\ln x - 7}{x(\ln^2 x - 2\ln x + 1)} \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{6\ln^3 x - 12\ln x}{x(\ln^4 x - 4\ln^2 x + 9)} \,\mathrm{d}x$.

10/ 4) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{2\sin x}{\cos^2 x - 4\cos x + 8} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{3\cos x - \sin x \cos x - \cos^3 x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x + 4\cos x \sin x}{5\cos^4 x + 4\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x} \,\mathrm{d}x$.

10/ 5) Vhodnou substitucí převeďte na integraci racionální funkce (výjimečně v tomto a příštím příkladu nemusíte určovat intervaly):

a) $\displaystyle\frac{\cos x}{\cos x \sin x - \sin^3 x} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin^2 x \cos x + 2\cos^5 x} \,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^3 x} \,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\sin^2 x \cos^2 x}{\cos x - \cos^3 x + 3\cos x \sin^2 x} \,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\sin^2 x \cos x}{\cos x - \sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x} \,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\cos^2 x}{\cos x - \sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x} \,\mathrm{d}x$.,

g) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\sin x \cos x}{\cos x - \sin^2 x + 3\cos^2 x \sin^2 x} \,\mathrm{d}x$.

10/ 6) Ukažte, že k převodu integrálu $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x - 2\cos^4 x}{2\sin x \cos^3 x - 4\sin^3 x \cos x} \,\mathrm{d}x$ na integrál z racionální funkce lze použít každou ze substitucí $t = \sin x$, $t = \cos x$, $t = \operatorname{tg} x$, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, a postupně je také k převodu použijte.(Jak už bylo řečeno u minulého příkladu, nemusíte u těchto dvou příkladů výjimečně určovat intervaly.)

10/ 7) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x + 2\sqrt{x-3}} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x+2} - 4}{\sqrt{x+2} - 4\sqrt[4]{x+2} + 4} \,\mathrm{d}x$.

10/ 8) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^5 - 2\sin 2x + \mathrm{e}^{3x}}{x^6 + 3\cos 2x + \mathrm{e}^{3x} + 5} \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\sinh x - 2\,\mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt[3]{\cosh x + \mathrm{e}^{-2x}}} \,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(\operatorname{arctg}^2 x + 1)(1 + x^2)} \,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int \frac{1}{x} \cos(3\ln x) \,\mathrm{d}x$.

10/ 9) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos 5x \,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \cos 3x \cdot \cos 4x \,\mathrm{d}x\,.$

(Použijte „v protisměru“ vzorce pro součet a rozdíl sinů a kosinů – najdete je např. na stránce [P14] přednášek.)

10/ 10) Vypočtěte:

a) $\displaystyle\int \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \sqrt{9x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$

(Příklady tohoto typu v písemné části zkoušky nebudou.)

– –

Výsledky: (I je hledaný integrál; substituci nepopisuji celou, pouze uvádím, jakou substituci volím)

10/ 1) a) $I = |t = \sin x| = \displaystyle\int (1-t^2)^2 t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{2\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$ na $\mathbb{R}$,

b) $I = |t = \cos x| = -\displaystyle\int (1-t^2)t^7 \,\mathrm{d}t = -\frac{\cos^8 x}{8} + \frac{\cos^{10} x}{10} + c$ na $\mathbb{R}$,

nebo

$I = |y = \sin x| = \displaystyle\int y^3(1-y^2)^3 \,\mathrm{d}y = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{2} + \frac{3\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + c$ na $\mathbb{R}$,

c) $I = \displaystyle\frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^2(1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - \sin^2 2x \,\cos 2x\right)\mathrm{d}x =$

$= |u = \sin 2x| = \displaystyle\frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{\sin^3 2x}{48} + c$ na $\mathbb{R}$.

10/ 2) a) $I = |t = \mathrm{e}^{2x}| = \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{3t-7}{(t-3)(t-1)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\ln|\mathrm{e}^{2x}-3| + 2\ln|\mathrm{e}^{2x}-1|\right) + c$

na $(-\infty, 0)$, na $\left(0, \dfrac{\ln 3}{2}\right)$ a na $\left(\dfrac{\ln 3}{2}, \infty\right)$,

b) $I = |t = \mathrm{e}^{x}| = \displaystyle\int \frac{t^2+4t+1}{(t^2+1)t}\,\mathrm{d}t = x + 4\mathrm{arctg}\,\mathrm{e}^x + c$ na $\mathbb{R}$,

c) $I = |t = \mathrm{e}^{3x} + 6\,\mathrm{e}^{2x} + 9\,\mathrm{e}^{x} + 4| = \dfrac{1}{3}\ln|\mathrm{e}^{3x} + 6\,\mathrm{e}^{2x} + 9\,\mathrm{e}^{x} + 4| + c$ na $\mathbb{R}$

(absolutní hodnotu zde lze vynechat).

10/ 3) a) $I = |t = \ln x| = \displaystyle\int \frac{t+3}{(t^2+4t+5)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t+4}{t^2+4t+5}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{(t+2)^2+1}\,\mathrm{d}t =$

$= \dfrac{1}{2}\ln(\ln^2 x + 4\ln x + 5) + \mathrm{arctg}\,(\ln x + 2) + c$ na $(0,\infty)$.

b) $I = |t = \ln x| = \displaystyle\int \frac{3t-7}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t = 4\frac{1}{\ln x - 1} + 3\ln|\ln x - 1| + c$ na $(0, \mathrm{e})$ a na (e, ∞).

c) $I = |t = \ln^4 x - 4\ln^2 x + 9| = \dfrac{3}{2}\ln|\ln^4 x - 4\ln^2 x + 9| + c$ na $(0,\infty)$

(absolutní hodnotu zde lze vynechat)

10/ 4) a) $I = |t = \cos x| = -2\displaystyle\int \frac{1}{t^2-4t+8}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{arctg}\,\frac{\cos x - 2}{2} + c$ na $\mathbb{R}$,

b) $I = |t = \sin x| = \displaystyle\int \frac{2-t+t^2}{4-t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{-2+t-t^2}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int \left(-1 + \frac{t-6}{(t-2)(t+2)}\right)\mathrm{d}t =$

$= -\sin x - \ln|\sin x - 2| + 2\ln|\sin x + 2| + c$ $(= -\sin x - \ln(2-\sin x) + 2\ln(\sin x + 2) + c)$

na $\mathbb{R}$,

c) $I = |t = \mathrm{tg}\,x| = \displaystyle\int \frac{t^2+4t}{5+4t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \frac{5}{1+(t+2)^2}\right)\mathrm{d}t =$

$= \mathrm{tg}\,x - 5\mathrm{arctg}\,(\mathrm{tg}\,x + 2) + c$ na $(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

10/5) a) $I = |t = \cos x| = -\displaystyle\int \frac{t}{(1-t^2)(t-1+t^2)}\,\mathrm{d}t$,

b) $I = |t = \operatorname{tg} x| = \displaystyle\int \frac{t(1+t^2)}{t^4+t^2+2}\,\mathrm{d}t$,

c) $I = |t = \sin x| = \displaystyle\int \frac{t}{1-t^2-t^3}\,\mathrm{d}t$,

d) $I = |t = \sin x| = \displaystyle\int \frac{-3t^3+3t+1}{4t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t$,

e) $I = |t = \operatorname{tg} x| = \displaystyle\int \frac{t^3+3t^2+t}{(-t^3+t^2+3t+1)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$,

f) $I = \left|t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| = \displaystyle\int \frac{6t^4+4t^3-12t^2+4t+6}{-t^6-t^4-11t^3+t^2+3t+1}\,\mathrm{d}t$,

g) $I = |t = \cos x| = -\displaystyle\int \frac{1+3t}{-3t^4+4t^2-t-1}\,\mathrm{d}t$.

10/6) $I = |t = \sin x| = \displaystyle\int \frac{-t^4+4t^2-2}{6t^5-8t^3+2t}\,\mathrm{d}t \left(= \int \frac{-t^4+4t^2-2}{6t(t^2-1)\left(t^2+\frac{1}{3}\right)}\,\mathrm{d}t\right)$,

$I = |u = \cos x| = \displaystyle\int \frac{-u^4-2u^2+1}{-6u^5+10u^3-4u}\,\mathrm{d}u \left(= \int \frac{u^4+2u^2-1}{6u(u^2-1)\left(u^2-\frac{2}{3}\right)}\,\mathrm{d}u\right)$,

$I = |v = \operatorname{tg} x| = \displaystyle\int \frac{v^2-2}{(2v-4v^3)(v^2+1)}\,\mathrm{d}v \left(= \int \frac{2-v^2}{4v\left(v^2-\frac{1}{2}\right)(v^2+1)}\,\mathrm{d}v\right)$,

$I = \left|z = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| = \displaystyle\int \frac{2z^4-2(1-z^2)^4}{(2z(1-z^2)^3-4z^3(1-z^2))(1+z^2)}\,\mathrm{d}z$

$\left(= \displaystyle\int \frac{2(1-z^2)^4-2z^4}{2z(z^2-1)(z^2-\sqrt{6}z+1)(z^2+\sqrt{6}z+1)(z^2+1)}\,\mathrm{d}z\right)$.

10/7) a) $I = |t = \sqrt{x-3}| = \displaystyle\int \frac{2t}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = \ln|x+2\sqrt{x-3}| - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-3}+1}{\sqrt{2}} + c$ na $(3,\infty)$

(absolutní hodnotu zde lze vynechat),

b) $I = |t = \sqrt[4]{x+2}| = \displaystyle\int \frac{t-4}{t^2-4t+4}\cdot 4t^3\,\mathrm{d}t = \int \left(4t^2-16+64\frac{-t+1}{(t-2)^2}\right)\mathrm{d}t =$

$= \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(x+2)^3} - 16\sqrt[4]{x+2} + 64\dfrac{1}{\sqrt[4]{x+2}-2} - 64\ln|\sqrt[4]{x+2}-2| + c$ na $(-2,14)$ a na $(14,\infty)$.

10/8) a) $I = |t = x^6+3\cos 2x+\mathrm{e}^{3x}+5| = \dfrac{1}{3}\ln|x^6+3\cos 2x+\mathrm{e}^{3x}+5| + c$ na $\mathbb{R}$

(absolutní hodnotu zde lze vynechat),

b) $I = |t = \cosh x+\mathrm{e}^{-2x}| = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{(\cosh x+\mathrm{e}^{-2x})^2} + c$ na $\mathbb{R}$,

c) $I = |t = \operatorname{arctg} x| = \displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x) + c$ na $\mathbb{R}$,

d) $I = |t = \ln x| = \displaystyle\int \cos(3t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\sin(3\ln x) + c$ na $(0,\infty)$.

10/9) a) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\sin 6x+\sin(-4x))\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{8}\cos 4x + c$ na $\mathbb{R}$,

b) $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (\cos 7x+\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + c$ na $\mathbb{R}$.

10/10) a) $I = \left|x-1 = \sin t;\ t\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right| = \displaystyle\int \cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) + c = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + c =$

$= \dfrac{1}{2}\arcsin(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} + c = \dfrac{1}{2}\arcsin(x-1) + \dfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + c$

na $(0,2)$,

b) $I = |3x = \sinh t| = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int \cosh t\cdot\cosh t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int (1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}t + \frac{1}{12}\sinh 2t + c =$

$= \dfrac{1}{6}t + \dfrac{1}{6}\sinh t\cosh t + c = \dfrac{1}{6}t + \dfrac{1}{6}\sinh t\sqrt{1+\sinh^2 t} + c = \dfrac{1}{6}\operatorname{argsinh} 3x + \dfrac{1}{2}x\sqrt{1+9x^2} + c$

na $\mathbb{R}$.