Aplikace diferenciálních rovnic

PŘÍKLADY ZE ZKOUŠKY

TYP „VÝMĚNA TEPLA"

(1.) V čase $t_0 = 0$ minut má čaj v hrnku teplotu $100°C$ a za 10 min poté už jen $80°C$, přičemž teplota okolního vzduchu je $T_{okolí} = 22°C$. Ozn. $T(t)$ jako teplotu čaje v čase t.

a) Napište dif. rovnici, kterou musí $T(t)$ splňovat a vyřešte ji.
b) Určete za jak dlouho bude mít čaj teplotu $60°C$.

$$\left.\begin{aligned} T(0) &= 100°C \\ T(10) &= 80°C \end{aligned}\right\} \text{tzv. počáteční podmínky}$$

$T_{okolí} = 22°C$

a) Diferenciální rovnice popisuje nějakou změnu - zde chladnutí čaje - tzn. JAK SE MĚNÍ TEPLOTA V ZÁVISLOSTI NA ČASE?

$$T'(t) = -k\,(T(t) - T_{okolí})$$

změna teploty v čase; chladne to; konstanta chladnutí (zatím neznámé); teplota okolí = 22

$$\boxed{\underbrace{T'(t)}_{y'} = \underbrace{-k}_{a(t)}\,\underbrace{T(t)}_{y} + \underbrace{k\,T_{okolí}^{\,\text{„}22\text{"}}}_{b(t)}}$$

lin. dif. rovnice 1. řádu: $y' = a(t)y + b(t)$

řešíme pomocí integračního faktoru $e^{-\int a(t)dt} = e^{\int k dt} = e^{kt}$

$$\underbrace{T'e^{kt} + kTe^{kt}}_{} = 22ke^{kt}$$

$$\int (T \cdot e^{kt})' dt = 22k \int e^{kt} dt$$

$$T e^{kt} = 22k \cdot \frac{1}{k} e^{kt} + C$$

obecné řešení $\rightarrow$ $\boxed{T(t) = 22 + Ce^{-kt}}$ $\leftarrow$ JAKÁ JE KONSTANTA C, k?

zjistíme z počátečních podmínek které dosadíme do výsledku

$T(0) = 22 + C \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow C = 78$ /

$T(10) = 22 + C \cdot e^{-k \cdot 10} \Rightarrow \boxed{k = \dfrac{\ln \frac{29}{39}}{-10}}$

b) konkrétní řešení pro naše poč. podmínky je tedy:

$$\boxed{T(t) = 22 + 78\, e^{\frac{\ln\frac{25}{39}}{10} t}}$$ tzv. partikulární řešení

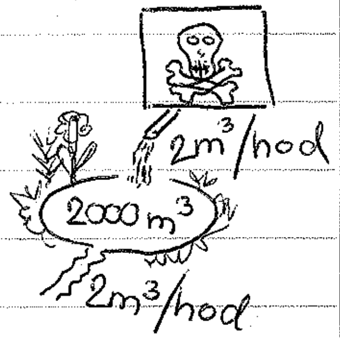
b) chceme vědět jaké je t při 60°C → dosadíme do našeho řešení:

$$60 = 22 + 78\, e^{\frac{\ln\frac{25}{39}}{10} t}$$

$$\boxed{\Rightarrow t = 10 \cdot \frac{\ln\frac{19}{39}}{\ln\frac{25}{39}}}$$

TYP „MÍCHÁNÍ DVOU LÁTEK"

(2) Znečištěná voda obsahující 3mg/m³ chemikálií vytéká do jezera konst. rychlostí 2m³/hod. Po promíchání s jezerní vodou vytéká zase rychl. 2m³/hod. Původně v jezeře 2000m³, žádné chemikálie.



$Q(t)$ = množství chemikálie v čase t ⇒ $Q(0)=0$ POČ. PODM.

a) Napište dif. rovnici, která situaci popisuje ($Q(t)$) a vyřešte
b) Kritická přípustná konc. chemikálie pro život v jezeře je 1mg/m³. Kolik času zbývá do záchrany života? (v jezeře)

a) JAK SE MĚNÍ MNOŽSTVÍ CHEMIKÁLIE V ZÁVISLOSTI NA ČASE?

$$Q'(t) = \begin{pmatrix}\text{rychlost}\\ \text{přítoku}\\ \text{chemikálie}\end{pmatrix}_{\text{samotné}} - \begin{pmatrix}\text{rychlost}\\ \text{odtoku}\end{pmatrix}$$

$$Q'(t) = \underset{mg/m^3}{3} \cdot \underset{m^3/hod}{2} - \underset{mg/m^3}{\frac{Q(t)}{2000}} \cdot \underset{m^3/hod}{2}$$

$$\boxed{\underbrace{Q'(t)}_{y'} = \underbrace{6}_{b(t)} - \frac{Q(t)\}y}{1000\}a(t)}}$$ lin. dif. rovnice 1. řádu $y' = a(t)y + b(t)$

opět řešíme - integrační faktor $e^{-\int a(t)dt} = e^{\int \frac{1}{1000}dt} = e^{t/1000}$

. . . .

obecné řešení: $\boxed{Q(t) = 6000 + C \cdot e^{-t/1000}}$ obecné

JAKÁ JE KONSTANTA C ?

dosadíme počáteční podmínku $Q(0) = 0$:

$$Q(0) = 6000 + C \cdot e^{0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad C = -6000$$

konkrétní řešení pro naši poč. podm. je:

$$\boxed{Q(t) = 6000 - 6000\, e^{-t/1000}}$$ partikulární

b) přípustná konc. $1\, mg/m^3$

$\Rightarrow$ v $2000\, m^3$ vody to bude $2000\, mg$

$\Rightarrow$ musíme zjistit t, pro které je $Q(t) = 2000$

$\rightarrow$ dosadíme do řešení:

$$2000 = 6000\left(1 - e^{-t/1000}\right)$$

$$e^{-t/1000} = \frac{2}{3}$$

$$-t/1000 = \ln \frac{2}{3}$$

$\rightarrow$ $t = -1000 \cdot \ln \frac{2}{3}$ hodin $\approx$ 16 dní a 21 hodin