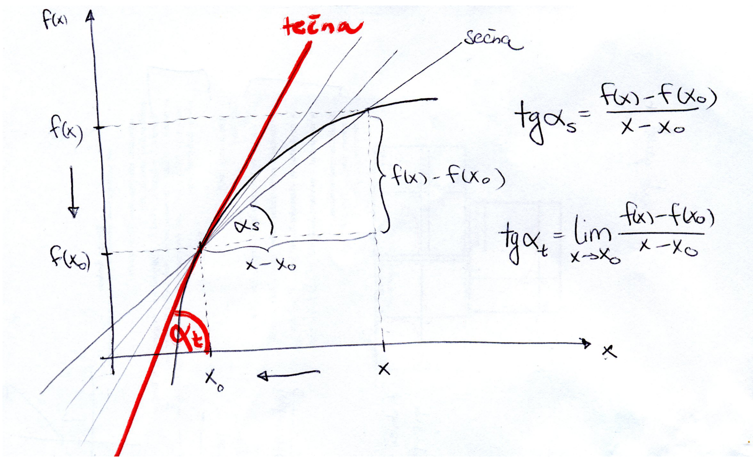
Derivace funkce

text neobsahuje přesné matematické definice, pouze jejich vysvětlení

Derivace funkce v bodě x_0 = míra změny funkce $f(x)$ v bodě x_0,
tj. "jak moc" klesá/roste $f(x)$ v bodě x_0,
tj. jaký sklon má tečna k $f(x)$ v bodě x_0.



$\Rightarrow$ chceme sestrojit tečnu v bodě x_0 a určit její sklon α_s

sklon tečny

$$tg\alpha_s = \frac{protilehla}{prilehla} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

při otáčení sečny v tečnu přibližujeme $x \to x_0$ a tím také $f(x) \to f(x_0)$, tedy

$$tg\alpha_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x)$$

což je směrnice tečny $f(x)$ v bodě x_0, hodnotu nazýváme derivací $f(x)$ v bodě x_0.

Rovnice tečny ke grafu funkce:

$$y - f(x_0) = f'(x)(x - x_0), \quad kde\ y := f(x)$$

např. chceme najít derivaci funkce x^3 v bodě $x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 3 \cdot 2^2(x-2) + 8 \\ &= \mathbf{12}x - 16 \end{aligned}$$

12 je derivace, tedy směrnice funkce v bodě $x_0 = 2$ a říká nám, že x^3 v bodě 2 roste 12-krát rychleji než přímka $y = x$.

Rovnice normály (kolmice k tečně):

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x)}(x - x_0)$$

pokud $f(x_0) \neq 0$

Příklad 1. *Určete tečny a normály v bodě x_0*

- $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 11}, x_0 = 2$
  Ř:tečna: $t : y = \frac{x}{6} + \frac{8}{3}$
  normála: $n : y = -6x + 15$

- $f(x) = 4 - x^2$, *x_0 - průsečík grafu s kladnou částí osy x*
  Ř:$x_0 = 2$
  tečna: $t : y = -4x + 8$
  normála: $n : y = \frac{x}{4} - 1/2$

Výpočet derivace pomocí definice
Pomocí definice lze derivace počítat, například $f(x) = x^3$:

$$(x^3)' = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2$$

Aby se derivace každé funkce nemusela počítat takto zdlouhavě přes limity, je žádoucí si zapamatovat derivace elementárních funkcí *(viz níže, ukradeno z Wikipedie).*
Pokud je funkce složitější, lze ji upravit na elementární pomocí pravidel pro derivování:
Linearita derivace:

$$(af + bg)' = af' + bg'$$

Derivace součinu:

$$(fg)' = f'g + g'f$$

Derivace podílu:

$$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

Derivace složené funkce: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$,

$$[(f \circ g)(x)]' = f'(g(x))g'(x)$$

Příklady viz dokument ”derivacePriklady.pdf”

Derivace některých elementárních funkcí

Funkce	**Derivace**
Polynomy	
$f(x) = c$ (c je konstanta)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^c$ (c je konstanta)	$f'(x) = cx^{c-1}$
Speciálně: $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
Mocniny, logaritmy	
$f(x) = c^x$ (c je konstanta, $c > 0$)	$f'(x) = c^x \ln c$
$f(x) = e^x$ (e je Eulerovo číslo)	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x$ (a je konstanta, $a > 0$, $a \neq 1$)	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
Speciálně: $f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
Goniometrické funkce	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \mathrm{tg}\ x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \mathrm{cotg}\ x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Cyklometrické funkce	
$f(x) = \arcsin x$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \mathrm{arctg}\ x$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \mathrm{arccotg}\ x$	$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Příklad 2. *derivujte*

$$(x^x)' = [e^{(\ln x)^x}]' = [e^{x\ln x}]' = e^{x\ln x}(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$$

$$[(x^2+3)^{\cos x}]' = e^{\cos x \ln(x^2+3)}(-\sin x \ln(x^2+3) + \cos x \frac{2x}{x^2+3})$$

Příklad 3. *(z písemky) Funkce $y(x)$ je zadaná implicitně:*

$$x^2y^3 + \cos y = -1 + \pi^3$$

Najděte $y'(x)$ a urete rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $P = [1, \pi]$.

Řešení: Zadání funkce zderivujeme, nezapomínáme, že $y = y(x)$ je funkce proměnné x:

$$2xy^3(x) + 3y^2(x)y'(x) - (\sin y(x))y'(x) = 0$$

$$y'(x) = \frac{2xy^3(x)}{\sin y(x) - 3y^2(x)}$$

Tečna ke grafu funkce v $P = [x_0, y(x_0)] = [1, \pi]$ (tj. $y(1) = \pi$)má tvar:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0),$$

po dosazení dostáváme:

$$y = -\frac{2}{3}\pi(x-1) + \pi$$

Příklad 4. *(z pisemky) Rozhodněte, zda je $y = \sqrt{1+x^2}$ řešením rovnice*

$$x^2y''y - (y')^2 = 0$$

Řešení: spočteme první a druhou derivaci y', y'' a dosadíme.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y'' = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$x^2\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\sqrt{1+x^2} - (\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})^2 = 0$$

Rovnice platí, tedy ANO, $y = \sqrt{1+x^2}$ je řešením zadané rovnice.