Limita funkce

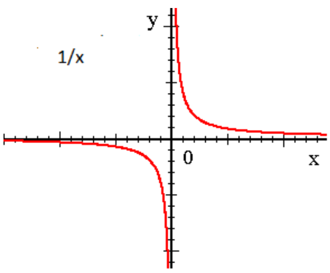
text neobsahuje přesné matematické definice, pouze jejich vysvětlení

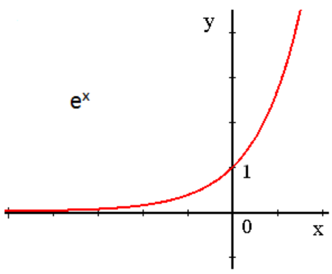
Limita L v bodě a = bod L (číslo nebo $\pm\infty$) na y-ové ose, ke kterému se funkce $f(x)$ blíží v libovolně malém okolí bodu a na x-ové ose.
Limita může být vlastní (číslo) nebo nevlastní ($\pm\infty$). Stejně tak bod a, ve kterém limitu určujeme.

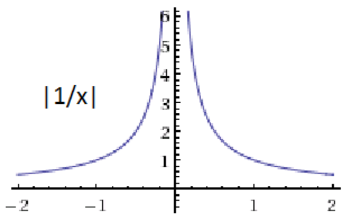
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Typy limit:

- **vlastní ve vlastním bodě**: např. $\lim_{x\to 0} e^x = 1$
- **vlastní v nevlastním bodě**:např. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
- **nevlastní ve vlastním bodě**: např.$\lim_{x\to 0} \mid \frac{1}{x} \mid = \infty$
- **nevlastní v nevlastním bodě**: např.$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$
- **Limita zprava/zleva**
  zprava: např. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
  zleva: např. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$







Vlastnosti limit:
Jestliže $\lim x \to af(x) = L$ a $\lim x \to ag(x) = K$,kde K, L jsou vlastní!, pak

1. $\lim_{x\to a} \mid f(x) \mid = \mid L \mid$
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = L \pm K$
3. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$, pro $K \neq 0$

Věta o třech limitách (squeeze theorem): Jestl. pro funkce f, g, h platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = M,$$

pak

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} g(x) = M$$

Důležité limity:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a}$$

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Nezapomeňte, že ...

$$\boxed{\ln x = \log_e x}$$

$$\boxed{x = e^{\ln x}}$$

$$\boxed{\ln a^x = x \ln a}$$

$$\boxed{y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y}$$

Počítání limit na základě jejich vlastností:
Přímé dosazení, nebo snadná úprava polynomů:

- $\lim_{x \to 0} (\sin x)$

$$[= \lim_{x \to 0} (sin 0) = 0]$$

- $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

$$\left[= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x - 1) = -2\right]$$

- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2}$

$$\left[= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = 3\right]$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{3}{x}\left(\frac{1}{5+x} - \frac{1}{5-x}\right)$

$$[= -6/25]$$

Triky s využitím platnosti důležitých limit (výše):

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$

$$\left[= \lim_{x\to 0} \frac{5\sin 5x}{5x} = 5\right]$$

- $\lim_{x\to 0}(x \cot 3x)$

$$\left[= \lim_{x\to 0} x\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos 3x}{\frac{3\sin 3x}{3x}} = 1/3\right]$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$

$$\left[= \lim_{x\to 0} 2\frac{e^{2x}-1}{2x} = 2\right]$$

- $\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos x + x + 2}$

$\left[= \lim_{x\to 0} e^{1/x \ln(\cos x + x + 2)} = ..\right]$...neexistuje ruzne jednostranne limity

- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x$

$$[= \sqrt[4]{e}]$$

- $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{6x-4}$

$$\left[= \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{6x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-4} = e^6\right]$$

Triky s odmocninami (většinou vynásobení nějakým vhodným zlomkem tak, aby některé odmocniny "zmizely"):

- $\lim_{x\to 25} \frac{5-\sqrt{x}}{25-x}$

$$\left[= \lim_{x\to 25} \left(\frac{5-\sqrt{x}}{25-x}\right)\left(\frac{5+\sqrt{x}}{5+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 25} \frac{25-x}{(25-x)(5+\sqrt{x})} = 1/10\right]$$

- $\lim_{x\to 9} \frac{9-x}{\sqrt{x}-3}$

$$\left[= \lim_{x\to 9} \left(\frac{9-x}{\sqrt{x}-3}\right)\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}\right) = \lim_{x\to 9} \frac{(9-x)(\sqrt{x}+3)}{-(9-x)} = -6\right]$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}$

$$\left[= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+12}-\sqrt{12}}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12}}{\sqrt{x^2+12}+\sqrt{12}}\right) = \ldots = 2\sqrt{12}\right]$$

Další příklady (směska):

- Nechť
$$f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 1 \\ 5-x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$
Spočtěte $\lim_{x\to 1} f(x)$

  Řešení: $\lim_{x\to 1^-}(3x-1) = 4, \quad \lim_{x\to 1^+}(5-x^2) = 4$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 4$$

- Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \mid x \mid$$

  Řešení:
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$
$\lim_{x\to 0^+} x = 0, \qquad \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \mid x \mid = 0$

- Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$$
Řešení: platí $- \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid$ a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$, proto
$$- \mid x \mid \leq x \sin\frac{1}{x} \leq \mid x \mid$$
Dále $\lim_{x\to 0} - \mid x \mid = 0, \quad \lim_{x\to 0} \mid x \mid = 0$, proto podle věty o 3 limitách funkce $- \mid x \mid$ a $\mid x \mid$ "zmáčknou" funkci $x \sin\frac{1}{x}$ a tedy
$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

- Určete limitu $f(x)$ v bodě 0.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Řešení: $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$, pak (podle vlastnosti součinu limit) je

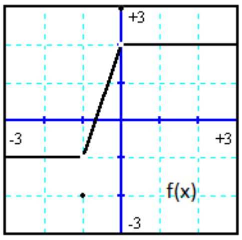
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \cdot (neco \quad mezi[-1,1]) = 0$$

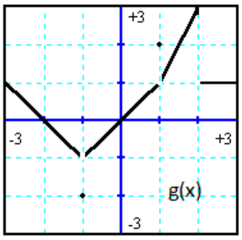
- Určete $\lim_{x\to 0} f(x)$ a $\lim_{x\to 1} f(x)$, pokud

$$\begin{array}{ll} x^4 \leq f(x) \leq x^2 & pro \quad x \in (-1,1) \\ x^2 \leq f(x) \leq x^4 & pro \quad \mid x \mid > 1 \end{array}$$

Řešení: po nakreslení obrázku zjevně $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$,$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

- Mějme dány grafy funkcí $f(x), g(x)$





Určete

1. $\lim_{x\to -1} f(x)$
2. $\lim_{x\to 0^-} f(x+2)$
3. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
4. $\lim_{x\to 0}(2f(x) + 3g(x))$
5. $\lim_{x\to -1^-} f(x^2)$
6. $\lim_{x\to 2} f(x)g(x)$
7. $\lim_{x\to -1}(f(x) + g(x))$
8. $\lim_{x\to -1} f(x)g(x)$

Řešení: $1.[-1], 2.[2], 3.[-1], 4.[4], 5.[2], 6.neexistuje, 7.[-2], 8.[1]$

L'Hospitalovo pravidlo
Dostaneme-li limitu typu "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", platí, že

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

tj. stačí funkce zderivovat a tak se (často) zbavíme výrazu "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$". Dokonce je tam možné řešit i limitu typu "$0\cdot\infty$", "$\frac{\infty}{0}$", "$\infty-\infty$", "1^∞", "0^0", "∞^0"

Příklady:

- $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

  $\left[= "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1\right]$

- $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$

  $\left[= "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}\right]$

- $\lim_{x\to 0}(cotgx - \frac{1}{x})$
  $[= "\infty-\infty" = \lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = "\frac{0}{0}" == \frac{-\sin x - x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0]$

- $\lim_{x\to a}(\arcsin(x-a)cotg(x-a))$

  $\left[= "0\cdot\infty" = \lim_{x\to a} \frac{\arcsin(x-a)}{\frac{1}{cotg(x-a)}} = "\frac{0}{0}" = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(x-a)^2}}}{\frac{1}{\cos^2(x-a)}} = 1\right]$

- $\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$
  Řešení:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} \\
\ln L &= \lim_{x\to 0} ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}} \\
\ln L &= \lim_{x\to 0} \frac{ln(e^x+x)}{x} = "\frac{0}{0}" \\
\ln L &= \frac{e^x+1}{e^x+x} \\
\ln L &= 2 \\
L &= e^2
\end{aligned}$$