Diferenciální rovnice

Co je diferenciální rovnice? Zjednodušeně rovnice, ve které se vyskytuje derivace. Je-li derivace 1. řádu (y'), říkáme jim Diferenciální rovnice 1.řádu. Samozřejmě existují i rovnice vyšších řádů, kde se vyskytují $y'', y''', \ldots$, ale těmi se tu zabývat nebudeme.
Typů je mnoho a často existují kuchařky jak je řešit.

Příklad 1 (Motivační)**.**

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \\ \frac{dy}{dx} &= y \\ \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int 1\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= x + C \\ y &= e^{x+C} = e^x C \end{aligned}$$

zderivujeme-li výsledek, který jsme dostali, dostaneme $y' = e^x C = y$*, což odpovídá zadání - ověřili jsme tedy správnost výpočtu.*

Vám byly na přednášce představeny zatím tyto rovnice:

1. **Rovnice se separovanými proměnnými**

   $$y' = f(x)g(y)$$

   tj. vyskytuje se v ní derivace $y' = \frac{dy}{dx}$ a součin funkcí proměnné x (zde $f(x)$) a proměnné y (zde $g(y)$).
   Příklad rovnice se separovanými proměnnými:

   $$y' = x^2 \sin y$$

2. **Lineární diferenciální rovnice**

   $$y' = a(x)y + b(x)$$

   tj. vyskytuje se v ní derivace $y' = \frac{dy}{dx}$ a funkce proměnné x (zde $a(x)$ a $b(x)$), které tvoří **lineární** funkci y (zde $a(x)y + b(x)$).
   Příklad lineární rovnice

   $$y' = \frac{1}{x}y + \cos x$$

   Tyto rovnice mohou být

a) homogenní, tj. "schází-li" jim ono $b(x)$, neboli $b(x) = 0$, pak se z nich stává konkrétní případ rovnice se separovanými proměnnými, kde $f(x) := a(x)$ a $g(y) := y$ a řešíme ji tedy stejně (viz níže).
Příklad homogenní lineární homogenní rovnice:

$$y' = \frac{1}{x}y$$

b) nehomogenní, pokud nic neschází, tedy rovnice je v plném tvaru $y' = a(x)y + b(x)$, pak se použije kuchařka s tzv. **integračním faktorem**, který je vždy stejný, tj.

$$e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$$

Příklad nehomogenní lineární rovnice:

$$y' = \frac{1}{x}y + \cos x$$

3. Další typy, jako např **Bernoulliova rovnice** a jiné - všechny typy, které se budete učit mají předem známé kuchařky, které si stačí jen zapamatovat! Často se zavede nějaká substituce (opět předem daná), která rovnici zjednoduší ideálně do tvaru lineární diferenciální rovnice.

Jak je řešit?

1. **Rovnice se separovanými proměnnými** y' rozepíšeme jako $\frac{dy}{dx}$ a snažíme se vše v čem je y dostat nalevo, vše v čem je x (nebo konstanta) dostat napravo a pak už jen integrujeme. Např:

$$\begin{aligned}
y' &= -\frac{xy}{x+1} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{xy}{x+1} \\
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= -\int \frac{x}{x+1}\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= -\int (1 - \frac{1}{x+1})\mathrm{d}x \\
\ln y &= -x + \ln|x+1| + C \\
e^{\ln y} &= e^{-x+\ln|x+1|+C} \\
y &= e^{-x}(x+1)e^{C} \qquad e^{C} = konst =: K \\
y &= e^{-x}(x+1)K
\end{aligned}$$

2. **Lineární diferenciální rovnice**

   a) **homogenní** - úplně stejně jako v předchozím případě

   b) **nehomogenní** - pomocí **integračního faktoru**

$$e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$$

Jednoduše obě strany rovnice vynásobíme tímto faktorem a upravujeme.
Co chceme dostat? Chceme na levé straně dostat známý *vzorec pro derivaci součinu* $(fg)' = f'g + g'f$, kde $f := y$ a $g := e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$. Přesněji chceme dostat pravou stranu tohoto vzorce, kterou pak upravíme na levou stranu. Takže místo

$$f'g + g'f$$

chceme dostat

$$y'e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + a(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}y$$

a to upravíme na

$$(ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x})'$$

A proč to tak chceme? Protože $(ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x})'$ se skvěle integruje:

$$\int (ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x})'\mathrm{d}x = ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + C$$

Takže celý postup znova, máme rovnici

$$y' = a(x)y + b(x)$$

a vynásobíme ji integračním faktorem a upravujeme:

$$\begin{aligned} y'e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} &= a(x)ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \\ y'e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} - a(x)ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x} &= b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Vidíme, že prakticky hned jsme na levé straně dostali požadovaný vzorec, takže podle vzorce na derivaci součinu přepíšeme a následně zintegrujeme:

$$\begin{aligned}
(ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x})' &= b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \\
\int (ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x})'\mathrm{d}x &= \int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \\
ye^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + C &= \int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} \\
y &= e^{\int a(x)\mathrm{d}x}\left[\int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} + C\right]
\end{aligned}$$

Tímto trikem s integračním faktorem jsme si příklad výrazně zjednodušili. Integrál $\int b(x)e^{-\int a(x)\mathrm{d}x}$ už většinou nebývá velký problém.

Ukažme si postup na příkladu (často v příkladech pro jednoduchost píšeme jen y místo $y(x)$):

Příklad 2. *Řešte:*

$$y' = -xy + 2xe^{\frac{x^2}{2}}$$

zde $a(x) = -x$ *a* $b(x) = 2xe^{\frac{x^2}{2}}$*, proto integrační faktor bude:*

$$e^{-\int a(x)\mathrm{d}x} = e^{\int x\mathrm{d}x} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

Obě strany rovnice vynásobíme tímto faktorem a upravujeme:

$$\begin{aligned}
y'e^{\frac{x^2}{2}} + xye^{\frac{x^2}{2}} &= 2xe^{\frac{x^2}{2}}e^{\frac{x^2}{2}} \\
\int (ye^{\frac{x^2}{2}})'\mathrm{d}x &= \int 2xe^{x^2} \\
ye^{\frac{x^2}{2}} &= e^{x^2} + C \\
y &= e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{x^2} + C)
\end{aligned}$$

Tomuto řešení, kde se objevuje nějaká neurčitá konstanta, se říká ***obecné řešení****. Zkuste je zderivovat a uvidíte, že dostanete zadání.*

Nehomogenní rovnice lze řešit i jinak, bez použití integračního faktoru - tzv. metodou **variace konstanty** - docela pěkné video s vysvětlením metody na příkladu zde:
`"http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Sbirka_uloh/video/lin3/index.html"`
(ale to jste tuším v přednáškách neměli).

Aplikace diferenciálních rovnic

Jak jsme si říkali, derivace byla vymyšlena proto, abychom měli jak popsat změnu, ať už rychlosti, množství, délky, vzdálenosti,..... Jak změna probíhá v závislosti na čase a okolních podmínkách popisují právě diferenciální rovnice. Ve slovních úlohách na aplikace bývá klíčovým problémem rovnici sestavit - pak už se řeší podle zajeté kuchařky (viz výše) a dospěje se k **obecnému řešení**. Naštěstí typy příkladů se opakují (zejména dva hlavní - výměna tepla a míchání nějakých látek) a po pár procvičených příkladech už by s určením rovnice neměl být problém.
V těchto příkladech bývají zadány tzv. **počáteční podmínky**, tj nějaké konkrétní hodnoty v určitém čase t a často se po Vás chce tyto podmínky do obecného řešení dosadit a najít tzv. **partikulární řešení** - to jest jedno konkrétní řešení, které vyhovuje počátečním podmínkám.

Dva praktické příklady z loňské zkoušky, ze kterých bude snad vše jasné najdete v souboru 'Aplikace DR - ukázka'.