Aplikace derivace - slovní úlohy

Postup:

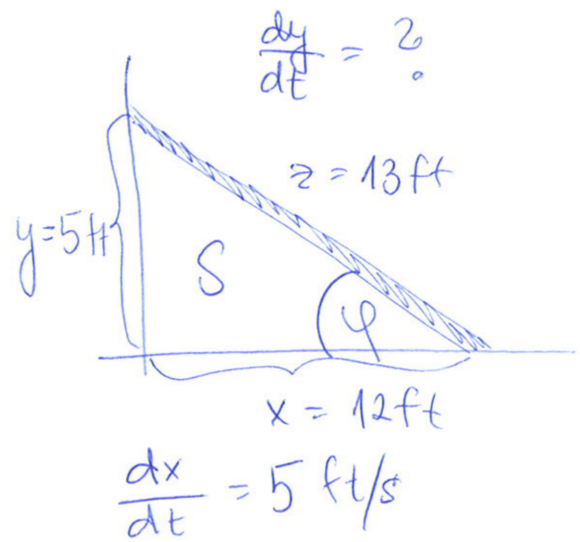
1. Nakresli si obrázek a pojmenuj proměnné. Použij t pro čas. Urči, které proměnné jsou diferencovatelné v čase (podle t)
2. Sepiš si numerické informace
3. Napiš si, co máš vypočítat
4. Sepiš si rovnice, které popisují vztahy proměnných
5. Derivuj podle t
6. Dosaď známé hodnoty

Příklad 1. *(Sklouzávající žebřík) 13 stop dlouhý žebřík je opřen o zeď a pomalu po ní zklouzává dolů. V jedné chvíli je jeho spodní část vzdálená od zdi 12stop a pohybuje se po podlaze rychlostí 5stop/sec.*

a) *Jak rychle v tuto chvíli sklouzává vrch žebříku?*

b) *Jak rychle se v tuto chvíli mění obsah plochy pod žebříkem?*

c) *Jak rychle se v tuto chvíli mění úhel, který svírá žebřík s podlahou*



Řešení:

a)

$$\frac{dy}{dt} = ?$$

$$\begin{aligned} z^2 &= x^2 + y^2 \\ y &= \sqrt{(z^2 - x^2)} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{-2x\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{z^2 - x^2}} = -12 \end{aligned}$$

Vrch žebříku sklouzává dolů rychlostí 12 stop/sec.

b)

$$\frac{dS}{dt} = ?$$

pro $z = 13$, $x = 12$ *je* $y = 5$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}xy \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{dx}{dt} = -59.5 \end{aligned}$$

Obsah plochy pod žebříkem se zmenšuje rychlostí 59.5 stop/sec.

c)

$$\frac{d\varphi}{dt} = ?$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{z} = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{z} &= \cos\varphi \\ x &= z\cos\varphi \\ \frac{dx}{dt} &= z(-\sin\varphi)\frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{1}{z(-\sin\varphi)}\frac{dx}{dt} \\ \frac{d\varphi}{dt} &= -1 \quad rad/s \end{aligned}$$

Úhel, který svírá žebřík s podlahou se v dané chvíli mění (změnšuje) rychlostí $-1 rad/s$.

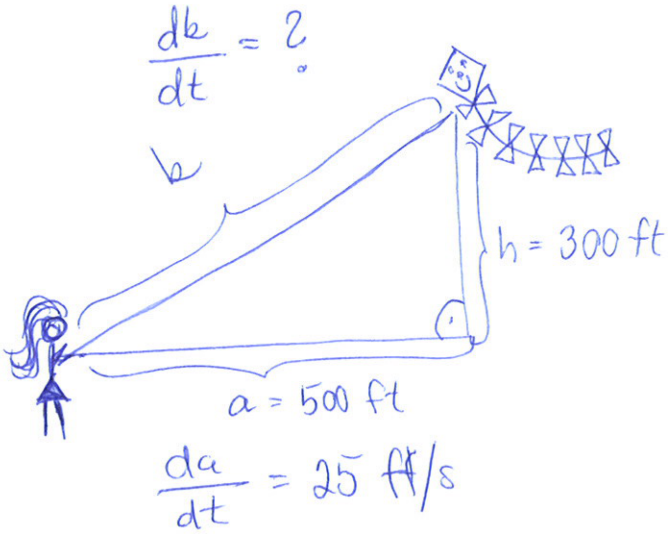
Příklad 2. *Výběh pro slepice má rozlohu* $200m^2$ *a tvar obdélníka přiléhajícího jednou stranou k domu. Ze zbývajících tří stran je potřeba výběh oplotit. Jak velké mají být strany výběhu, aby bylo potřeba co nejméně pletiva na plot? Kolik metrů pletiva bude potřeba?*

(Výsledek: strany 10×20 *m, pletiva 40 metrů)*

Příklad 3. *Designér firmy LEGO plánuje výrobu krabice na kostky, přičemž krabice má mít tvar hranolu (=kvádr se čtvercovou podstavou) bez víka o objemu 32 litrů. Jaké rozměry má taková krabice mít, aby na její výrobu bylo potřeba co nejméně materiálu? Kolik materiálu bude tedy potřeba? [1 litr=1* $dm^3 = 1000cm^3$]

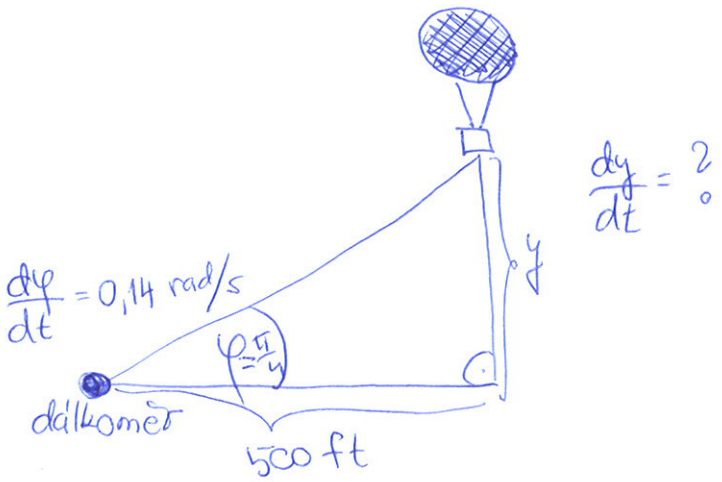
(Výsledek: Rozměry krabice $4 \times 4 \times 2$ *dm, celkem* $48dm^3$*)*

Příklad 4. *(Pouštění draka)*
Holčicka pouští draka ve výšce 300ft nad zemí a vítr jí ho unáší horizontálně od ní (drak zůstává ve stejné výšce, jen se vzdaluje) rychlostí 25ft/sec. Jak rychle musí povolovat provázek ve chvíli, kdy je od drak vzdálený 500ft?



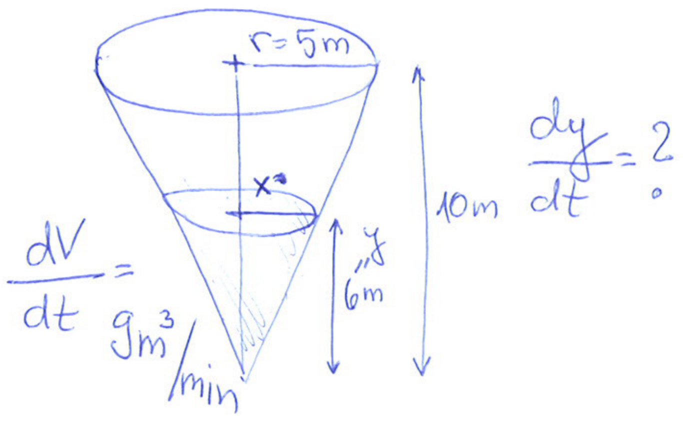
(Výsledek: Provázek odmotává rychlostí $21.4ft/s$*)*

Příklad 5. *Horkovzdušný balón vzlétá od země a je měřen dálkoměrem, který je 500stop daleko od bodu vzletu. V určité chvíli je úhel, který svírá dálkoměrič s balónem* $\pi/4$*, úhel roste rychostí* $0.14rad/min$*. Jak rychle v této chvíli balón letí?*



[Výsledek: V dané chvíli stoupá balón rychlostí $140 ft/min$*]*

Příklad 6. *Voda stéká do kuželovitého tanku rychlostí* $9m^3/min$. *Tank stojí špičkou dolů a má výšku* $10m$ *a poloměr základny* $5m$. *Jak rychle stoupá hladina vody ve chvíli, kdy je hluboká* $6m$*?*



[Výsledek: V dané chvíli stoupá hladina vody rychlostí $1/\pi\ m/min$*]*

Příklad 7. *Když je kulatý železný talíř ohříván v troubě, jeho poloměr se zvětšuje rychlostí* $0.01cm/min$. *Jakou rychlostí se plocha talíře zvětšuje ve chvíli, kdy je jeho poloměr* $50cm$*?*

[Výsledek: V danou chvíli se plocha zvětšuje rychlostí π cm^2/min]

Příklad 8. *Jaká je rychlost klesání hladiny kapaliny uvnitř válcové nádrže o polomeru podstavy r metrů při rovnoměrném vypouštení, když za 1 minutu vyteče 3000 l kapaliny?*

(Výsedek: Hladina klesá rychlostí $\frac{3}{\pi r^2} m/min$)