MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

# Řešené příklady na extrémy a průběh funkce se zaměřením na ekonomii

Bakalářská práce

Veronika Kruttová

Brno 2008

Prohlášení :

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci *Řešené příklady na extrémy a průběh funkce se zaměřením na ekonomii* vypracovala samostatně pod vedením RNDr. Jana Osičky, CSc. a uvedla v seznamu literatury všechny použité zdroje.

V Brně dne 30.5.2008 Veronika Kruttová

Poděkování :

Ráda bych poděkovala vedoucímu bakalářské práce RNDr. Janu Osičkovi, CSc za metodické vedení, cenné rady při jejím vypracování a čas strávený při konzultacích.

# Obsah

# Úvod

Hledání extrémů a vyšetřování průběhu funkcí je jednou ze základních aplikací diferenciálního počtu. Proto se student matematicky zaměřených oborů seznamuje s řešením úloh na extrémy a průběh funkcí zpravidla již v prvním semestru. Tato oblast matematiky bývá probírána i na ekonomických oborech z důvodů širokého využití extrémů v ekonomii.
Tato práce je zaměřena pouze na vyšetřování funkcí jedné reálné proměnné.
U čtenářů se předpokládá znalost diferenciálního počtu.
V první kapitole naleznete tvrzení a definice užívané při řešení úloh na extrémy a průběh funkcí. Použila jsem znění ze základní literatury [1], věty jsem uváděla bez důkazů jen s odkazem na knihu, kde může případný zájemce důkaz nalézt.
Druhá a čtvrtá kapitola obsahují řešené příklady na lokální a absolutní extrémy a průběh funkcí. Zaměřila jsem se na složitější příklady ze zadání bakalářských zkoušek z minulých let a doplnila jsem je příklady z [1] a [2].
Čtvrtá kapitola je rozdělena podle typů vyšetřovaných funkcí.
Třetí kapitola je věnována užití extrémů v ekonomii.
Grafy funkcí jsou vytvořeny v programu MAPLE. Celá práce je vysázena systémem LaTeX $2_\varepsilon$.

# Kapitola 1

# Teorie

V této kapitole budou uvedeny základní definice a tvrzení týkající se vyšetřování extrémů a průběhu funkce.

**Věta 1.** *Nechť má funkce $f$ na otevřeném intervalu $I$ vlastní derivaci. Pak platí:*

1. *Funkce $f$ je neklesající na $I$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na $I$.*
2. *Funkce $f$ je rostoucí na $I$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na $I$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu $I$.*

*Analogická tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 113.

**Důsledek 2.** *Nechť $f$ má konečnou derivaci na otevřeném intervalu $I$.*

*(a) Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je $f$ rostoucí na $I$.*

*(b) Je-li $f'(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je $f$ klesající na $I$.*

**Definice 3.** Řekneme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$:
*lokální maximum*, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,
*lokální minimum*, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,
*ostré lokální maximum*, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,
*ostré lokální minimum*, existuje-li $\mathcal{O}(x_0)$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.
Lokální maxima a minima nazýváme souhrnně *lokální extrémy.*

**Věta 4.** *Nechť má funkce $f$ v bodě $x_0$ lokální extrém a nechť $f'(x_0)$ existuje. Pak $f'(x_0) = 0$.*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 116.

**Věta 5.** *Nechť je funkce $f$ spojitá v bodě $x_0$ a má vlastní derivaci v nějakém ryzím okolí $\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Jestliže pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0), x < x_0$, je $f'(x_0) > 0$ a pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0), x > x_0$, je $f'(x_0) < 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum. (Obdobné tvrzení platí pro ostré lokální minimum).*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 117.

**Věta 6.** *Nechť $f'(x_0) = 0$. Je-li $f''(x_0) > 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální minimum. Je-li $f''(x_0) < 0$, pak má funkce $f$ v bodě $x_0$ ostré lokální maximum.*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 118.

**Definice 7.** Buď funkce $f$ definovaná na množině $M$. Existuje-li na $M$ největší (nejmenší) hodnota funkce $f$, nazýváme ji *absolutním maximem (absolutním minimem)* funkce $f$ na $M$. Absolutní minima a maxima souhrnně nazýváme *absolutními extrémy.*
Jestliže tedy $x_0 \in M$ a platí $f(x) \leq f(x_0)$ pro všechna $x \in M$, říkáme, že funkce $f$ má na $M$ absolutní maximum v bodě $x_0$. Podobně pro absolutní minimum.

**Definice 8.** Řekneme, že funkce $f$ je *konvexní na intervalu I*, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Řekneme, že funkce $f$ je *konkávní na intervalu I*, jestliže pro libovolné tři body $x_1, x_2, x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$, platí

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Pokud v definici nahradíme neostré nerovnosti ostrými, dostáváme definice pojmů *ostré konvexnosti* a *ostré konkávnosti* na intervalu $I$.

**Věta 9.** *Nechť $f$ má vlastní derivaci na otevřeném intervalu $I$. Pak je $f$ konvexní (ostře konvexní) na $I$ právě tehdy, když je funkce $f'$ neklesající (rostoucí) na $I$.*
*Analogické tvrzení platí pro $f$ konkávní (ostře konkávní) na $I$ a $f'$ nerostoucí (klesající) na $I$.*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 124.

**Důsledek 10.** *Nechť $I$ je otevřený interval a $f$ má vlastní druhou derivaci na $I$.*

(a) *Je-li $f''(x) > 0$ pro každé $x \in I$, pak je $f$ ostře konvexní na $I$.*

(b) *Je-li $f''(x) < 0$ pro každé $x \in I$, pak je $f$ ostře konkávní na $I$.*

**Definice 11.** Nechť má funkce $f$ derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$. Je-li tato derivace nevlastní, předpokládáme navíc, že je $f$ spojitá v bodě $x_0$.
Řekneme, že $x_0$ je *inflexním bodem* funkce $f$, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ takové, že funkce $f$ je ostře konkávní na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a je ostře konvexní na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$ anebo naopak. Stručně říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ inflexi.

**Věta 12.**

1. *Nechť $x_0$ je inflexní bod a nechť existuje $f''(x)$. Pak $f''(x) = 0$.*

2. *Nechť $f''(x) = 0$ a existuje okolí $\mathcal{O}_\delta(x_0)$ takové, že platí $f''(x) < 0$ pro každé $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) > 0$ pro každé $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, nebo naopak. Pak je $x_0$ inflexním bodem funkce $f$.*

3. *Nechť $f''(x) = 0$ a $f'''(x) \neq 0$. Pak je $x_0$ inflexním bodem funkce $f$.*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 127.

**Definice 13.** Buď $x_0 \in \mathbb{R}$. Přímka $x = x_0$ se nazývá *asymptotou bez směrnice* funkce $f$, jestliže má $f$ v $x_0$ alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní, tj. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ nebo $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.
Přímka $y = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ se nazývá *asymptotou se směrnicí* funkce $f$, jestliže platí $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ nebo $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$.

**Věta 14.** *Přímka $y = ax + b$ je asymptotou funkce $f$ pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{a} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

*Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.*

*Důkaz.* Důkaz naleznete v [1] na straně 129.

**Důsledek 15.** *Přímka $y = b$ je asymptotou funkce $f$ pro $x \to +\infty$ právě tehdy, když $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Analogické tvrzení platí pro $x \to -\infty$.*

# Kapitola 2

# Řešené příklady na lokální a absolutní extrémy

**Příklad 2.1.** Najděte lokální extrémy funkce

$$f : y = \ln \cos x.$$

*Řešení:* Funkce je definována na množině, kde $\cos x > 0$. Jedná se o intervaly $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ pro $k \in \mathbb{Z}$.
První derivace funkce $f$ je $y' = -\frac{\sin x}{\cos x}$.
Body, ve kterých by mohly nastat lokální extrémy, jsou $x = k\frac{\pi}{2}$, kde $k \in \mathbb{Z}$.
Vyšetříme monotónnost funkce $f$ - stačí na intervalu $(0, 2\pi)$, funkce je totiž periodická.

| | $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ | $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ | $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | klesající | klesající | rostoucí | rostoucí |

Lokální extrémy tedy mohou nastat v bodech $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $k$ liché ale není funkce definována, proto jsou lokální extrémy pouze v bodech $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jde o lokální maxima a jejich funkční hodnota

$$f(2k\pi) = \ln \cos 2k\pi = 0.$$

**Příklad 2.2.** Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[-3, 3]$,

$$f : y = (x^2 - 2)\,\mathrm{e}^{-2x}.$$

*Řešení:* Funkce je definována na celém $\mathbb{R}$, je tedy definována i na zkoumaném intervalu.
První derivace funkce je $y' = -2\,\mathrm{e}^{-2x}\,(x+1)\,(x-2)$. Nulové body derivace jsou $x = -1$ a $x = 2$. Vyšetříme znaménka derivace na zadaném intervalu:

| | $(-3,-1)$ | $(-1,2)$ | $(2,3)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | klesající | rostoucí | klesající |

Lokální extrémy nastávají v bodech $x = -1$ a $x = 2$. Jejich funkční hodnoty jsou $f(-1) = -\mathrm{e}^2 \doteq -7,389$ (lokální minimum) a $f(2) = 2\,\mathrm{e}^{-4} \doteq 0,037$ (lokální maximum).
Abychom nalezli absolutní extrémy, musíme vypočítat funkční hodnoty v krajních bodech intervalu a porovnat je s nalezenými funkčními hodnotami lokálních extrémů.

$$f(-3) = 7\,\mathrm{e}^6 \doteq 2824 \qquad \text{a} \qquad f(3) = 7\,\mathrm{e}^{-6} \doteq 0,017$$

Absolutní maximum funkce $f$ je v bodě $x = -3$ a absolutní minimum funkce $f$ je v bodě $x = -1$.

**Příklad 2.3.** Najděte absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[1, \mathrm{e}]$,

$$f : y = x^2 \ln x.$$

*Řešení:* Definičním oborem funkce $f$ je množina $D(f) = (0, \infty)$.
První derivace funkce $f$ je $y' = x\,(2\ln x + 1)$. Nulové body derivace jsou $x = 0$ a $x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$. První z těchto bodů neleží v definičním oboru funkce $f$ a druhý není ve zkoumaném intervalu.
Funkční hodnoty v krajních bodech jsou $f(1) = 0$ a $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}^2$. Absolutní minimum nastává v bodě $x = 1$ a absolutní maximum v bodě $x = \mathrm{e}$.

**Příklad 2.4.** Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[0, 5]$,

$$f : y = x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 1.$$

*Řešení:* Funkce je definována v každém bodě intervalu.
První derivace funkce $f$ je $y' = 5\,x^2\,(x-1)\,(x-3)$. Body, ve kterých $y' = 0$, jsou $x = 0, x = 1$ a $x = 3$. Nyní vyšetříme monotónnost funkce $f$ :

| | $(0, 1)$ | $(1, 3)$ | $(3, 5)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | rostoucí | klesající | rostoucí |

V bodě $x = 1$ je lokální maximum, jehož funkční hodnota $f(1) = 2$, a v bodě $x = 3$ je lokální minimum, jehož funkční hodnota $f(3) = -26$. Zbývá vypočítat funkční hodnoty v krajních bodech:

$$f(0) = 1 \qquad \text{a} \qquad f(5) = 626.$$

Absolutní maximum nastává v bodě $x = 5$ a absolutní minimum v bodě $x = 3$.

**Příklad 2.5.** Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[-1, 6]$,

$$f : y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}.$$

*Řešení:* Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
První derivace funkce $f$ je rovna

$$y' = \frac{(4-x)\,\sqrt[3]{x^2}}{3\,x\,(x+2)^2}.$$

Body, ve kterých je první derivace rovna 0 nebo není definovaná, jsou $x = 0$ a $x = 4$. Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(-1, 0)$ | $(0, 4)$ | $(4, 6)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | klesající | rostoucí | klesající |

V bodě $x = 0$ je lokální minimum s funkční hodnotou $f(0) = 0$. V bodě $x = 4$ je lokální maximum, jeho funkční hodnota je $f(4) \doteq 0,42$.
V krajních bodech intervalu nabývá funkce hodnot:

$$f(-1) = 1 \qquad \text{a} \qquad f(6) \doteq 0,41.$$

Absolutním maximem funkce na zadaném intervalu je bod $[\,x, y\,] = [\,-1, 1\,]$ a absolutním minimem je bod $[\,0, 0\,]$.

**Příklad 2.6.** Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[\,-2, 2\,]$,

$$f : y = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}}.$$

*Řešení:* Definičním oborem funkce $f$ je celá množina $\mathbb{R}$. Funkce je sudá, protože $f(-x) = (-x+1)^{\frac{2}{3}} + (-x-1)^{\frac{2}{3}} = (-1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}} + (-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{2}{3}} = $ $= (x-1)^{\frac{2}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}} = f(x)$.
První derivace funkce je rovna

$$y' = \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\,(x-1) + \sqrt[3]{(x-1)^2}\,(x+1)}{(x+1)\,(x-1)}.$$

Body, ve kterých je první derivace rovna 0 nebo není definovaná, jsou $x = -1$, $x = 0$ a $x = 1$. Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(-2,-1)$ | $(-1,0)$ | $(0,1)$ | $(1,2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | klesající | rostoucí | klesající | rostoucí |

V bodech $x = -1$ a $x = 1$ jsou lokální minima se shodnými funkčními hodnotami $f(-1) = f(1) = \sqrt[3]{4} \doteq 1,59$. V bodě $x = 0$ je lokální maximum, jehož funkční hodnota je rovna $f(0) = 2$.
Zbývá vypočítat funkční hodnoty v krajních bodech zadaného intervalu. Protože je funkce sudá, budou obě hodnoty stejné.

$$f(-2) = f(2) \doteq 3,08.$$

Funkce má absolutní maxima v bodech $x = -2$ a $x = 2$ a absolutní minima v bodech $x = -1$ a $x = 1$.

**Příklad 2.7.** Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[\,\frac{3}{2}, 4\,]$,

$$f : y = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x - 1}.$$

*Řešení:* Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
První derivace funkce $f$ je rovna

$$y' = \frac{2\,(x-2)\,(x^2 - x + 1)}{(x-1)^2}.$$

Nulovým bodem předchozí rovnice je na zadaném intervalu pouze bod $x = 2$.

Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(\frac{3}{2}, 2)$ | $(2, 4)$ |
|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | klesající | rostoucí |

Bod $x = 2$ je lokálním minimem funkce $f$. Jeho funkční hodnota je rovna $f(2) = 3$.
Nyní vypočítáme hodnoty funkce v krajních bodech intervalu:

$$f(\tfrac{3}{2}) = 4,25 \qquad \text{a} \qquad f(4) \doteq 9,67.$$

Z vypočítaných hodnot snadno určíme, že absolutní minimum funkce $f$ na intervalu $[\frac{3}{2}, 4]$ je v bodě $x = 2$ a absolutní maximum je v bodě $x = 4$.

**Příklad 2.8.** Najděte lokální a absolutní extrémy funkce $f$ na intervalu $[-5, -1]$,

$$f : y = \frac{1 - x^3}{x^2}.$$

*Řešení:* Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
První derivace funkce $f$ je rovna

$$y' = \frac{-x^3 - 2}{x^3}.$$

Nulovým bodem předchozí rovnice je na zadaném intervalu pouze bod $x = \sqrt[3]{-2} \doteq -1,26$. Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(-5, \sqrt[3]{-2})$ | $(\sqrt[3]{-2}, -1)$ |
|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | klesající | rostoucí |

V bodě $x = \sqrt[3]{-2}$ je lokální minimum s funkční hodnotou $f(\sqrt[3]{-2}) \doteq 1,89$.
Zbývá vypočítat hodnoty funkce v krajních bodech:

$$f(-5) = 5,04 \qquad \text{a} \qquad f(-1) = 2.$$

Lokální minimum v bodě $x = \sqrt[3]{-2}$ je zároveň absolutním minimem. Absolutní maximum nastává v bodě $x = -5$.

# Kapitola 3

# Extrémy v ekonomii

Modelovým příkladem užití extrémů v ekonomii může být problém maximalizace užitku spotřebitele.
Každého spotřebitele lze podle jeho preferencí charakterizovat nějakou užitkovou funkcí, která vyjadřuje, jaký užitek mu přináší různé kombinace spotřebních statků. Jeho cílem je tento užitek maximalizovat. Ale spotřeba statků je spojena i s určitou újmou (obětí) ve formě platby za tento statek. Množství peněžních prostředků spotřebitele je přitom omezené.
Formální zápis této úlohy by mohl vypadat například takto:

$$\max\,[\,u(x_1,...,x_n)\,;\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \mathrm{M},\; x_i \geq 0\,],$$

| | |
|---|---|
| $x_1,...,x_n$ | množství jednotlivých spotřebních statků |
| $u(x_1,...,x_n)$ | užitková funkce spotřebitele |
| $p_i$ | jednotková cena i − tého statku |
| M | množství peněžních prostředků spotřebitele |

Řešením této úlohy by byla kombinace statků $x_1,...,x_n$, která bude spotřebiteli při daném rozpočtovém omezení přinášet největší užitek.
Existuje mnoho dalších problémů k řešení - např. minimalizace nákladů firmy, maximalizace zisku společnosti atd.
V těchto úlohách jsou vesměs vyšetřovány funkce více reálných proměnných, navíc s určitými podmínkami, tzn. jde o vázané extrémy. Tyto úlohy se řeší jinými metodami, které přesahují rámec mé bakalářské práce, jež je primárně zaměřena na hledání extrémů a průběhu funkcí jedné reálné proměnné. Proto zde nebudu uvádět konktrétní řešené příklady.

# Kapitola 4

# Řešené příklady na průběh funkce

V této kapitole budou řešeny některé obtížnější úlohy na průběh funkce. Pro přehlednost budou děleny podle typu funkce.

## 4.1 Polynomy

**Příklad 4.1.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = x\,(x-4)^3.$$

*Řešení:*

1. Definiční obor dané funkce je $D(f) = \mathbb{R}$. Snadno určíme průsečíky grafu funkce s osami $x$ a $y$. Je zřejmé, že funkce prochází počátkem $[\,0,0\,]$ a bodem $[\,4,0\,]$. Protože $f(-x) = -x\,(-x-4)^3 = x\,(x+4)^3$, funkce není ani sudá ani lichá.

2. Pro počítání derivací je vhodné zadanou funkci upravit

$$y = x\,(x-4)^3 = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 64x.$$

První derivace funkce potom bude

$$y' = 4x^3 - 36x^2 + 96x - 64 = 4\,(x-1)\,(x-4)^2,$$

odtud plyne $y' = 0$ pro $x = 1$ a $x = 4$. Vyšetříme znaménko derivace:

| | $(-\infty,1)$ | $(1,4)$ | $(4,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | klesající | rostoucí | rostoucí |

Lokální extrém nastává pouze v bodě $x = 1$, jde o lokální minimum a jeho funkční hodnota $f(1) = -27$.

3. Dále budeme vyšetřovat konvexnost, konkávnost a hledat inflexní body. K tomu je potřeba vypočítat druhou derivaci.

$$y'' = 12x^2 - 72x + 96 = 12\,(x^2 - 6x + 8) = 12\,(x-2)\,(x-4).$$

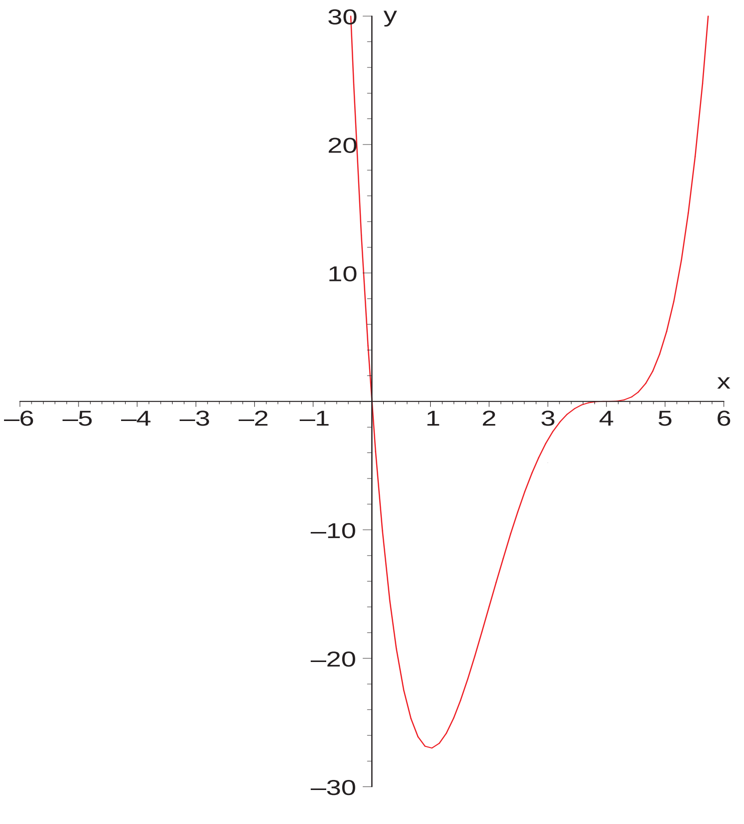
Vyšetříme znaménka derivace :

| | $(-\infty, 2)$ | $(2, 4)$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | konvexní | konkávní | konvexní |

Inflexní body jsou v bodech $x = 2$ a $x = 4$, jejich funkční hodnoty jsou $f(2) = -16$ a $f(4) = 0$.

4. Funkce nemá žádné asymptoty.

5. Graf funkce je:



## 4.2 Racionální lomené funkce

**Příklad 4.2.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = \frac{(2x+1)\,(4x-3)}{x^2+2|x|-3}.$$

*Řešení:*

1. Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Průsečíky s osou $x$ jsou $\left[ -\frac{1}{2}, 0 \right]$ a $\left[ \frac{3}{4}, 0 \right]$ a průsečík s osou $y$ je bod $[\,0, 1\,]$.

2. V zadání funkce se vyskytuje absolutní hodnota $|x|$, proto je nutné funkci vyšetřovat s ohledem na to, zda je $x \leq 0$ nebo $x \geq 0$.

   (a) Pro $x \geq 0$ a $x \neq 1$ máme funkci

   $$f_1 : y = \frac{(2x+1)\,(4x-3)}{x^2+2x-3}.$$

   Její derivace

   $$y' = \frac{6(3x^2-7x+2)}{(x^2+2x-3)^2}.$$

   Body, ve kterých je první derivace rovna nule, jsou $x = \frac{1}{3}$ a $x = 2$. Vyšetříme znaménka derivace:

   | | $(0, \frac{1}{3})$ | $(\frac{1}{3}, 2)$ | $(2, \infty)$ |
   |---|---|---|---|
   | $y'$ | $+$ | $-$ | $+$ |
   | $y$ | rostoucí | klesající | rostoucí |

   Vidíme, že v bodě $x = \frac{1}{3}$ nastává lokální maximum, jehož funkční hodnota $f(\frac{1}{3}) = \frac{5}{4}$, a v bodě $x = 2$ nastává lokální minimum, jehož funkční hodnota je $f(2) = 5$.

   (b) Pro $x \leq 0$, $x \neq -1$ máme funkci

   $$f_2 : y = \frac{(2x+1)(4x-3)}{x^2-2x-3}.$$

   Její derivace

   $$y' = \frac{-14x\,(x+3)}{(x^2-2x-3)^2}.$$

   Body, ve kterých může nastat lokální extrém, jsou $x = -3$ a $x = 0$.

Opět vyšetříme znaménka derivace :

| | $(-\infty,-3)$ | $(-3,0)$ |
|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | klesající | rostoucí |

V bodě $x=-3$ tedy nastává lokální minimum s funkční hodnotou $f(-3)=\frac{25}{4}$.

3. Pro vyšetřování inflexních bodů, konvexnosti a konkávnosti je rovněž potřeba rozlišovat, zda jsme na intervalu $(-\infty,0]$ nebo $[0,\infty)$.

   (a) Pro $x\geq 0$ je druhá derivace

   $$y''=-6\frac{6x^3-21x^2+12x-13}{(x^2+2x-3)^3}.$$

   Body, ve kterých může nastat inflexe, jsou $x=1$ a $x=\frac{1}{6}(\sqrt[3]{5^2}+5\sqrt[3]{5}+7)\doteq 3,08$. Znaménka derivace :

| | $(0,1)$ | $(1,\frac{1}{6}(\sqrt[3]{5^2}+5\sqrt[3]{5}+7))$ | $(\frac{1}{6}(\sqrt[3]{5^2}+5\sqrt{5}+7),\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | konkávní | konvexní | konkávní |

   (b) Pro $x\leq 0$ je druhá derivace

   $$y''=\frac{14(2x^3+9x^2+9)}{(x^2-2x-3)^3}.$$

   Body, ve kterých může nastat inflexe, jsou $x=-1$ a $x=-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3)\doteq -4,7$. Znaménka derivace :

| | $(-\infty,-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3))$ | $(-\frac{1}{2}(\sqrt[3]{3^2}+3\sqrt[3]{3}+3),-1)$ | $(-1,0)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | konkávní | konvexní | konkávní |

4. Vzhledem k definičnímu oboru funkce, který je $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$, je jasné, že funkce bude mít dvě asymptoty bez směrnice a to $x=-1, x=1$. Průběh funkce v okolí těchto asymptot vyšetříme pomocí limit:

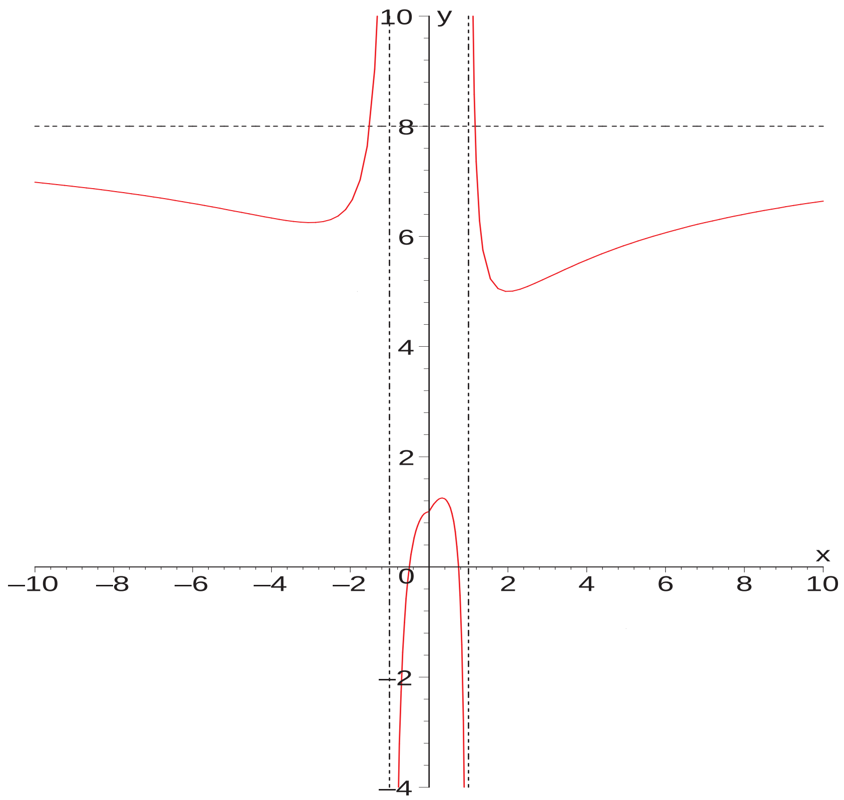
$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\infty,$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\infty.$$

Zbývá zjistit, zda má funkce asymptoty se směrnicí $y=ax+b$ :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=0=a,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}[\,f(x)-ax\,]=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=8=b.$$

Asymptota se směrnicí je tedy $y=8$.

5. Nyní můžeme sestrojit graf:



**Příklad 4.3.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = \frac{|x|^3}{(x+2)^2}.$$

*Řešení:*

1. Definičním oborem funkce je množina $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, funkce prochází počátkem.

2. Ve funkci se vyskytuje absolutní hodnota, proto ji musíme vyšetřovat na intervalech $(-\infty, 0]$ a $(0, \infty)$ zvlášť.

   (a) Pro $x > 0$ máme funkci

   $$f_1 : \frac{x^3}{(x+2)^2}.$$

   Její první derivace je

   $$y' = \frac{x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

   Body, ve kterých je první derivace rovna 0 nebo body, ve kterých první derivace neexistuje, jsou $x = -6, x = -2$ a $x = 0$. Protože ani jeden z těchto bodů nesplňuje podmínku $x > 0$, bude derivace na celém intervalu $(0, \infty)$ buď pouze záporná nebo pouze kladná. Dosazením libovolného čísla z tohoto intervalu zjistíme, že $y' > 0$, z čehož plyne, že funkce $f$ bude na intervalu $(0, \infty)$ rostoucí.

   (b) Pro $x \leq 0$ máme funkci

   $$f_2 : \frac{-x^3}{(x+2)^2}.$$

   Její první derivace je

   $$y' = \frac{-x^2(x+6)}{(x+2)^3}.$$

   Body, ve kterých je první derivace rovna 0 nebo body, ve kterých první derivace neexistuje, jsou $x = -6, x = -2$ a $x = 0$. Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(-\infty, -6)$ | $(-6, -2)$ | $(-2, 0]$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | klesající | rostoucí | klesající |

Lokální extrém nastává v bodě $x = -6$. Je to lokální minimum, jehož funkční hodnota je $f(-6) = \frac{216}{16} = 13,5$. V bodě $x = -2$ lokální extrém nastat nemůže, protože funkce $f$ není v tomto bodě definovaná. V bodě $x = 0$ nastává lokální minimum s funkční hodnotou $f(0) = 0$.

3. Nyní budeme vyšetřovat konvexnost, konkávnost a inflexní body.

   (a) Pro $x > 0$ je druhá derivace funkce
   $$y'' = \frac{24x}{(x+2)^4}.$$
   Body, ve kterých je druhá derivace rovna 0 nebo body, ve kterých druhá derivace neexistuje, jsou $x = -2$ a $x = 0$. Protože tyto body nespadají do intervalu $(0, \infty)$, bude funkce $f$ na celém tomto intervalu buď pouze konkávní nebo pouze konvexní. To zjistíme dosazením libovolného čísla z tohoto intervalu do druhé derivace funkce. Jelikož $y'' > 0$, bude funkce $f$ na intervalu $(0, \infty)$ konvexní.

   (b) Pro $x \leq 0$ máme druhou derivaci funkce
   $$y'' = \frac{-24x}{(x+2)^4}.$$
   Body, ve kterých je druhá derivace rovna 0 nebo body, ve kterých druhá derivace neexistuje, jsou $x = -2$ a $x = 0$. Vyšetříme znaménka derivace:

   | | $(-\infty, -2)$ | $(-2, 0)$ |
   |---|---|---|
   | $y''$ | $+$ | $+$ |
   | $y$ | konvexní | konvexní |

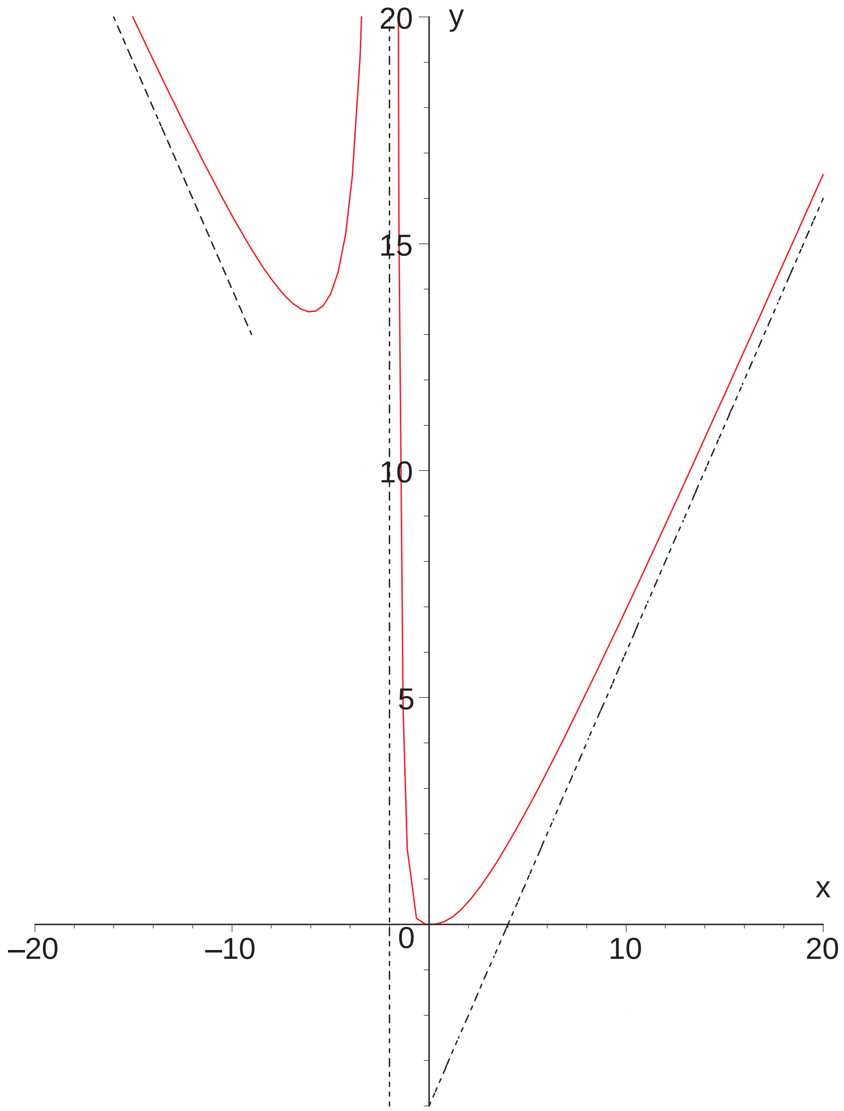
4. Asymptotou bez směrnice bude vzhledem k definičnímu oboru funkce přímka $x = -2$. Vyšetříme chování funkce v okolí této přímky:
   $$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \infty,$$
   $$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \infty.$$
   Zbývá zjistit, zda má funkce asymptoty se směrnicí $y = ax + b$.
   Pro $x \to \infty$ vypočítáme limity:
   $$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a,$$
   $$\lim_{x \to \infty} [\, f(x) - x \,] = -4 = b.$$

Takže asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ je přímka $y = x - 4$.
Pro $x \to -\infty$ vypočítáme limity:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = a,$$
$$\lim_{x\to-\infty} [\, f(x) + x \,] = 4 = b.$$

Asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$ je přímka $y = -x + 4$.

5. Nyní můžeme sestrojit graf:



## 4.3 Goniometrické a cyklometrické funkce

**Příklad 4.4.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = \sin 3x - 3 \sin x.$$

*Řešení:*

1. Definičním oborem funkce je $\mathbb{R}$, funkce je periodická s periodou $2\pi$, protože

   $$f(x + 2\pi) = \sin(3x + 6\pi) - 3\sin(x + 2\pi) = \sin 3x - 3\sin x = f(x).$$

   Funkce je lichá, protože

   $$f(-x) = \sin(-3x) - 3\sin(-x) = -\sin 3x + 3\sin x = -f(x).$$

   Průsečíky s osou $x$ jsou v bodech $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

2. První derivace funkce je

   $$y' = 3\cos 3x - 3\cos x.$$

   Nulové body této rovnice jsou $x = k\frac{\pi}{2}$ pro $k \in \mathbb{Z}$. Vyšetříme znaménka derivace (stačí na intervalu $(0, 2\pi)$):

   | | $(0, \frac{\pi}{2})$ | $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ | $(\pi, 3\frac{\pi}{2})$ | $(3\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ |
   |---|---|---|---|---|
   | $y'$ | $-$ | $+$ | $+$ | $-$ |
   | $y$ | klesající | rostoucí | rostoucí | klesající |

   Takže lokální minima nastanou v bodech $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, jejich funkční hodnota $f(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = -4$ a lokální maxima nastanou v bodech $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, jejich funkční hodnota $f(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi) = 4$.

3. Druhá derivace funkce je

   $$y'' = -9\sin 3x + 3\sin x.$$

   Nulové body této rovnice jsou $x = k\pi$ pro $k \in \mathbb{Z}$ a body, pro které platí $\sin x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, což jsou na intervalu $(0, 360°)$ body $x \doteq 55°$, $x \doteq 125°, x \doteq 235°, x \doteq 305°$.

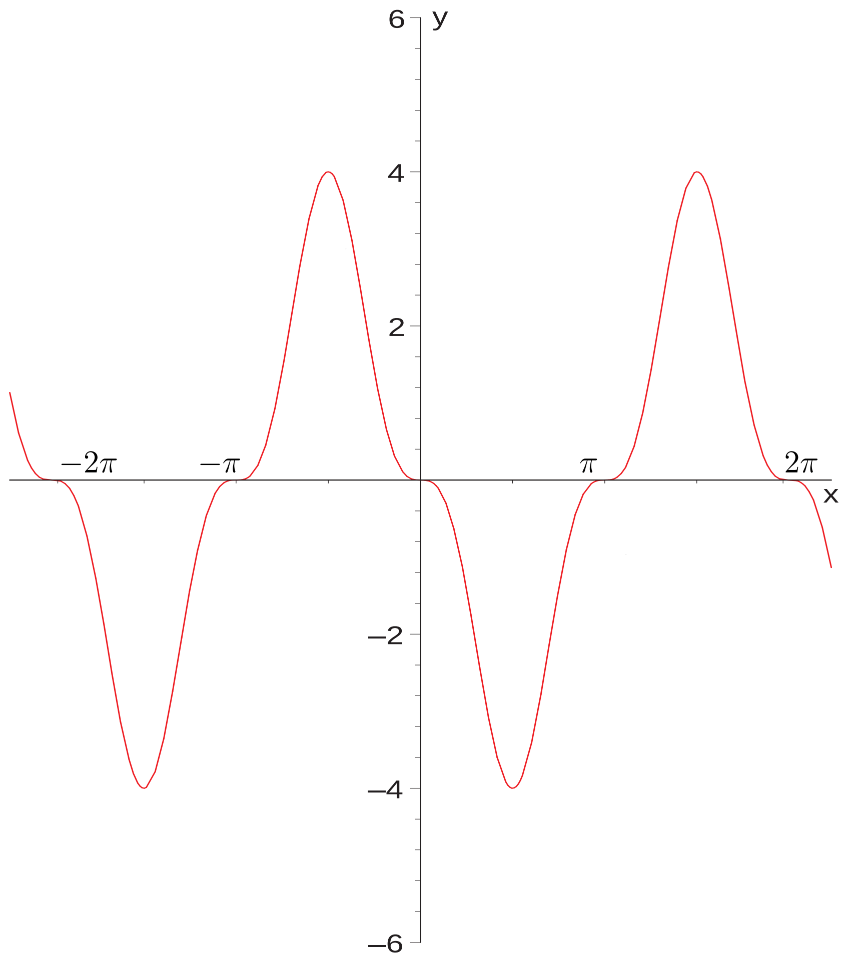
Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(0, 55°)$ | $(55°, 125°)$ | $(125°, 180°)$ | $(180°, 235°)$ | $(235°, 305°)$ | $(305°, 360°)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | konkávní | konvexní | konkávní | konvexní | konkávní | konvexní |

Funkční hodnoty inflexních bodů jsou $f(k180°) = 0$, kde $k \in \mathbb{Z}$, $f(55°) = f(125°) \doteq -2,20$, $f(235°) = f(305°) \doteq 2,20$.

4. Funkce $f$ nemá žádné asymptoty.

5. Nyní můžeme sestrojit graf:



**Příklad 4.5.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = x + 2\,\mathrm{arccotg}\, x.$$

*Řešení:*

1. Definičním oborem funkce je $\mathbb{R}$, průsečík s osou $y$ je bod $[\,0, \pi\,]$.

2. První derivace funkce je

$$y' = 1 - \frac{2}{x^2 + 1},$$

body, ve kterých je první derivace rovna 0, jsou $x = 1$ a $x = -1$. Vyšetříme znaménka derivace:

| | $(-\infty, -1)$ | $(-1, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | rostoucí | klesající | rostoucí |

Vidíme, že v bodě $x = 1$ nastává lokální minimum, jehož hodnota je $f(1) = 1+\frac{\pi}{2}$, a v bodě $x = -1$ nastává lokální maximum, jehož hodnota je $f(-1) = -1 + \frac{3\pi}{2}$.

3. Druhá derivace funkce je

$$y'' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2},$$

rovnice je rovna nule pouze v bodě $x = 0$.

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | konkávní | konvexní |

Bod $x = 0$ je inflexním bodem, zároveň i průsečíkem s osou $y$, jeho funkční hodnotu jsme spočítali výše.

4. Nyní budeme zjišťovat, zda má funkce asymptoty. Pro $x \to \infty$ vypočítáme limity:

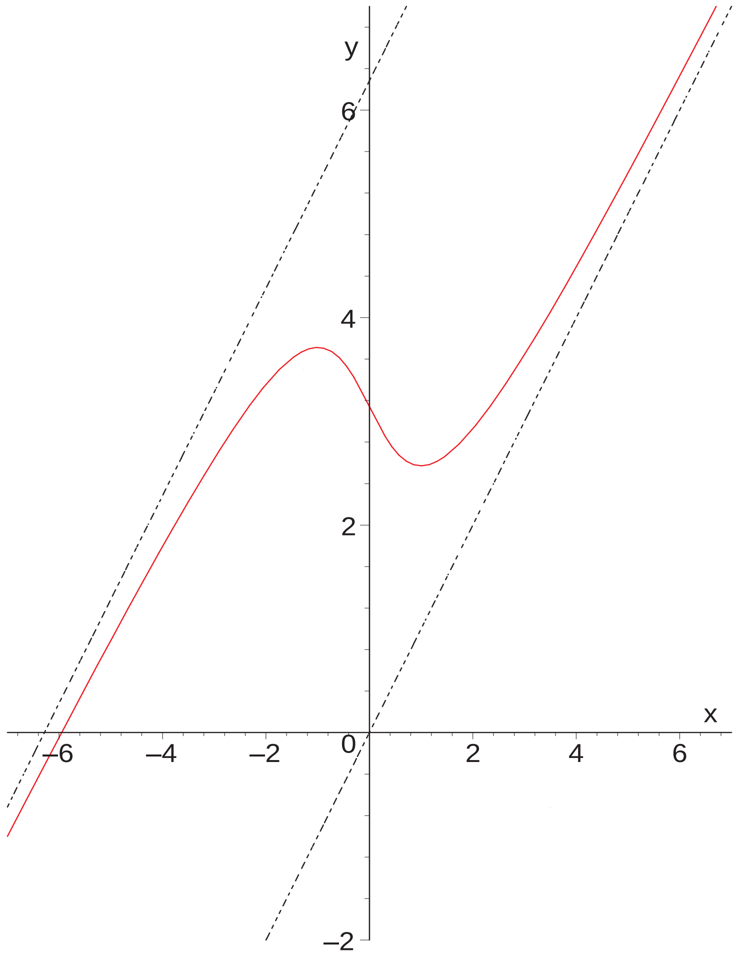
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a,$$
$$\lim_{x\to\infty} [\, f(x) - x\,] = 0 = b.$$

Takže asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ je přímka $y = x$.
Pro $x \to -\infty$ vypočítáme limity:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a,$$
$$\lim_{x \to -\infty} [\, f(x) - x\,] = 2\pi = b.$$

Asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$ je přímka $y = x + 2\pi$.

5. Nyní sestrojme graf:



## 4.4 Exponenciální a logaritmické funkce

**Příklad 4.6.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = x \ln^2 x.$$

*Řešení:*

1. Definičním oborem funkce je množina $(0, \infty)$, funkce prochází bodem $[1, 0]$.

2. První derivace funkce je

$$y' = \ln^2 x + 2 \ln x = \ln x (\ln x + 2).$$

Její nulové body jsou $x = \mathrm{e}^{-2} \doteq 0,14$ a $x = 1$. Vyšetříme znaménka derivace na definičním oboru funkce:

| | $(0, \mathrm{e}^{-2})$ | $(\mathrm{e}^{-2}, 1)$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | rostoucí | klesající | rostoucí |

V bodě $x = \mathrm{e}^{-2} \doteq 0,14$ nastává lokální maximum, jeho funkční hodnota je $f(\mathrm{e}^{-2}) = 4\,\mathrm{e}^{-2}$. V bodě $x = 1$ je lokální minimum, jehož funkční hodnota je rovna $f(1) = 0$.

3. Druhá derivace funkce je rovna

$$y'' = 2\,\frac{1}{x}\,(\ln x + 1).$$

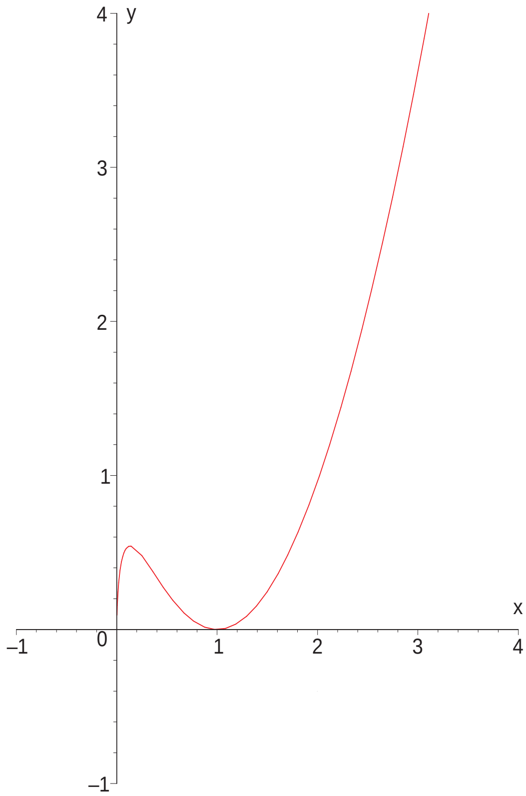
Předchozí rovnice nabývá nuly v bodě $x = \mathrm{e}^{-1} \doteq 0,37$. Vyšetříme konvexnost a konkávnost:

| | $(0, \mathrm{e}^{-1})$ | $(\mathrm{e}^{-1}, \infty)$ |
|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | konkávní | konvexní |

4. Funkce nemá žádné asymptoty. K sestrojení funkce je vhodné vyšetřit její chování v krajním bodě definičního oboru. Vypočteme proto limitu funkce pro $x \to 0$ zprava:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln^2 x = 0.$$

5. Nyní můžeme sestrojit graf:




**Příklad 4.7.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = (x-2)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}.$$

*Řešení:*

1. Definičním oborem funkce množina $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Průsečík s osou $x$ je v bodě $x = 2$.

2. První derivace funkce je rovna

$$y' = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,\frac{x^2+x-2}{x^2}.$$

   Nulové body jsou $x = -2$ a $x = 1$. Vyšetříme znaménka derivace na definičním oboru funkce $f$:

| | $(-\infty,-2)$ | $(-2,0)$ | $(0,1)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | rostoucí | klesající | klesající | rostoucí |

Lokální maximum nastává v bodě $x = -2$, jeho funkční hodnota je $f(-2) = -4\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \doteq -6,6$. V bodě $x = 1$ je lokální minimum s funkční hodnotou $f(1) = -\mathrm{e}^{-1} \doteq -0,4$.

3. Druhá derivace funkce $f$ je

$$y'' = \frac{1}{x^4}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}\,(5x-2).$$

Nulový bod druhé derivace je $x = \frac{2}{5}$. Vyšetříme znaménka derivace na definičním oboru funkce $f$:

| | $(-\infty, 0)$ | $(0, \frac{2}{5})$ | $(\frac{2}{5}, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | konkávní | konkávní | konvexní |

V bodě $x = \frac{2}{5}$ nastává inflexe.

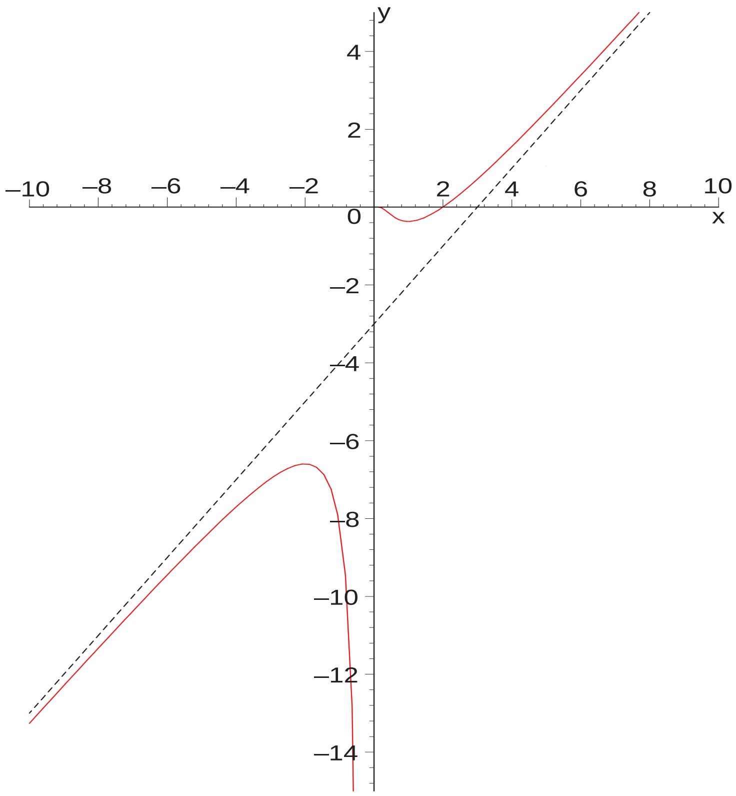
4. Budeme hledat asymptoty se směrnicí ve tvaru $y = ax + b$:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [\, f(x) - x\,] = -3 = b.$$

Asymptota se směrnicí funkce $f$ je $y = x - 3$. Zbývá vyšetřit chování funkce v bodě $x = 0$, ve kterém není funkce $f$ definovaná.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty.$$

5. Nyní můžeme sestrojit graf:




## 4.5 Mocninné funkce

**Příklad 4.8.** Vyšetřete průběh funkce $f$ na intervalu $[\,0,3\,]$,

$$f : y = (3 - x)\,\sqrt{x}.$$

*Řešení:*

1. Funkce má dva průsečíky s osou $x$ a to body $x = 0$ a $x = 3$. Funkce je spojitá v každém bodě intervalu $[\,0,3\,]$.

2. První derivace funkce je tvaru

$$y' = \sqrt{x}\,\frac{3(1-x)}{2x}.$$

Bod, ve kterém může nastat na zadaném intervalu extrém, je $x = 1$.

Vyšetříme monotónnost funkce:

| | $(0,1)$ | $(1,3)$ |
|---|---|---|
| $y'$ | $+$ | $-$ |
| $y$ | rostoucí | klesající |

V bodě $x = 1$ je lokální maximum s funkční hodnotou $f(1) = 2$.

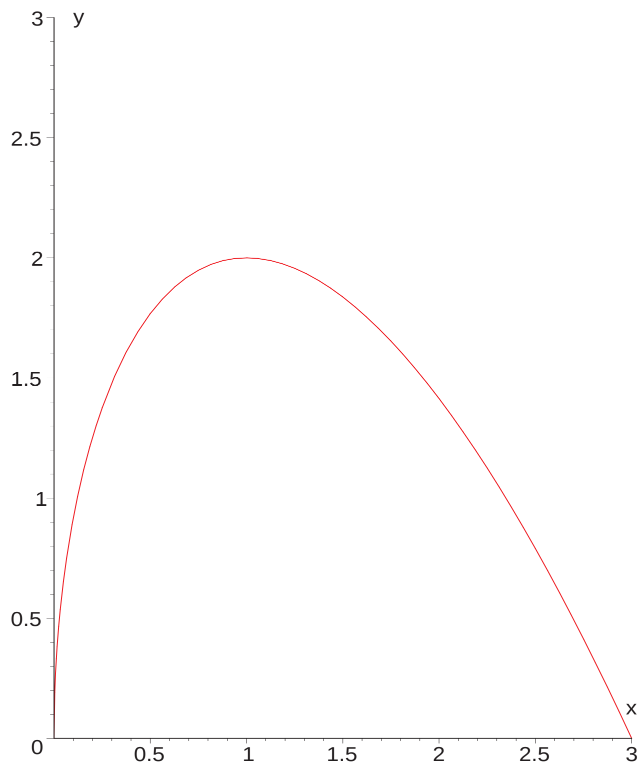
3. Druhá derivace funkce je rovna

$$y'' = \frac{-3\sqrt{x}}{4\,x^2}\,(x+1).$$

Předchozí rovnice nemá na vyšetřovaném intervalu žádné nulové body. Dosazením libovolného čísla z intervalu $[\,0,3\,]$ zjistíme, že $y'' < 0$. To znamená, že funkce $f$ bude na celém intervalu $[\,0,3\,]$ konkávní.

4. Funkce nemá žádné asymptoty.

5. Nyní můžeme sestrojit graf:



**Příklad 4.9.** Vyšetřete průběh funkce

$$f : y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}.$$

*Řešení:*

1. Vypočítáme definiční obor funkce $f$. Vyjdeme z toho, že výraz pod odmocninou musí být nezáporný a jmenovatel ve zlomku se nesmí rovnat nule. Definiční obor bude množina $(-\infty, 0] \cup (2, \infty)$.

2. První derivace funkce je tvaru

$$y' = \frac{(x-3)\sqrt{x(x-2)}}{(x-2)^2}.$$

Body, ve kterých je první derivace nulová nebo ve kterých není definovaná, jsou krajní body definičního oboru $x = 0$ a $x = 2$ a bod $x = 3$. Vyšetříme monotónnost funkce na $D(f)$:

| | $(-\infty, 0)$ | $(2, 3)$ | $(3, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $y$ | klesající | klesající | rostoucí |

V bodě $x = 3$ nastává lokální minimum. Jeho funkční hodnota je $f(3) \doteq 5,2$.

3. Druhá derivace funkce je rovna

$$y'' = \frac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}.$$

Druhá derivace není definovaná v krajních bodech definičního oboru. Vyšetříme znaménka derivace na $D(f)$:

| | $(-\infty, 0)$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|
| $y''$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | konvexní | konvexní |

4. Budeme hledat asymptoty se směrnicí funkce $f$ ve tvaru $y = ax + b$:
   Pro $x \to \infty$ vypočítáme limity:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a,$$
$$\lim_{x\to\infty} [\, f(x) - x\,] = 1 = b.$$

   Takže asymptota se směrnicí pro $x \to \infty$ je přímka $y = x + 1$.
   Pro $x \to -\infty$ vypočítáme limity:

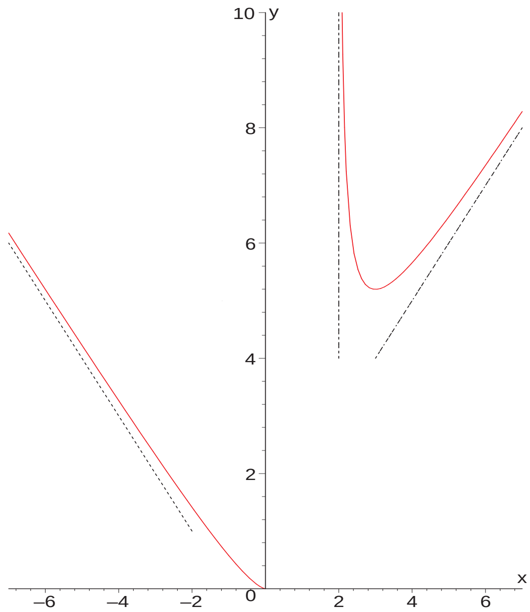
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 = a,$$
$$\lim_{x\to-\infty} [\, f(x) + x\,] = -1 = b.$$

   Asymptota se směrnicí pro $x \to -\infty$ je přímka $y = -x - 1$.
   Nyní vyšetříme, jak se bude funkce $f$ chovat v krajních bodech definičního oboru $D(f)$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty.$$

   Z poslední počítané limity plyne, že funkce $f$ bude mít asymptotu bez směrnice ve tvaru $x = 2$.

5. Nyní můžeme sestrojit graf:



# Literatura

[1] Došlá Z., Kuben J.: *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*, Masarykova univerzita, Brno 2004

[2] Jirásek F., Kriegelstein E., Tichý Z.: *Sbírka řešených příkladů z matematiky*, 3.vydání, SNTL, Praha 1987, s. 473-491

[3] Studijní materiály předmětu Kvantitativní ekonomie vyučovaného na Přírodovědecké fakultě pod kódem E5340.

[4] Rybička J.: *LaTeXpro začátečníky*, 3.vydání, KONVOJ, Brno 2003

[5] Lomtatidze L., Plch R.: *Sázíme v LaTeXu diplomovou práci z matematiky*, 1.vydání, Masarykova univerzita, Brno 2003