NEURČITÝ INTEGRÁL

Existuje tzv. primitivní funkce $F(x)$ tak, že $f(x) = F'(x)$?
značíme

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

Například

$$x^2 = (\frac{x^3}{3})'$$

ale i

$$x^2 = (\frac{x^3}{3} + 2)'$$

$$x^2 = (\frac{x^3}{3} + 50)'$$

...
$\Rightarrow$ takových primitivních funkcí je nekonečně mnoho (proto "neurčitý integrál").

$$x^2 \leftrightarrows \frac{x^3}{3} + const$$

$$\rightarrow \text{integrace}, \leftarrow \text{derivace}$$

Neurčitý integrál je tedy množina všech primitivních funkcí k funkci f na intervalu I, zapsáno matematicky:

$$\int f(x)\mathrm{d}x := \{F(x) + C, C \in \mathbb{R}\}$$

Primitivní funkce neexistuje vždy!

$$\text{Je-li } f(x) \text{ spojitá na } I \Rightarrow \exists F(x) \text{ na } I$$

Pravidla integrování

$$\int cf(x)\mathrm{d}x = c\int f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$$

Metody integrování

- Metodа per partes (po částech)

$$\boxed{\int u'v = uv - \int uv'}$$

(samozřejmě $u = u(x), v = v(x)$ a integrujeme podle x)
Per partes se používá zejména pro integrály typu:

$$\int x^n e^{ax} \mathrm{d}x, \int x^n \cos(ax) \mathrm{d}x, \int x^a \ln^n \mathrm{d}x, \ldots$$

- Metoda substituce
nějakou vnitřní/vynásobenou funkci substituujeme (nahradíme) jednodušší, pak nesmíme zapomenout změnit podle čeho integrujeme (tj. nahradit dx výrazem odpovídajícím substituci): např.

$$\int \sin(3x) \mathrm{d}x$$

substituce $t = 3x, dt = 3dx, dx = dt/3$, pak

$$\int \sin(3x) \mathrm{d}x = \int \sin(t) \frac{\mathrm{d}t}{3} = -\frac{1}{3} \cos t = -\frac{1}{3} \cos 3x$$

URČITÝ RIEMANNŮV INTEGRÁL

= obsah plochy pod grafem funkce na určitém intervalu $[a, b]$:

$$\int_a^b = f(x) \mathrm{d}x$$

Pravidla integrování

$$\int_a^b cf(x) \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x) \mathrm{d}x$$

Výpočet

Je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, tj. $\int f(x) \mathrm{d}x = F(x)$ pak

$$\boxed{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = F(b) - F(a)} =: [F(x)]_a^b$$

Metody integrování

- Metoda per partes
$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$
- Metoda substituce
stejně jakou neurčitých. Buď na závěr dosadíme zpět substituci, NEBO přepočítáme na začátku meze a o vracení substituce už senemusíme starat např.
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\mathrm{d}x$$
substituce $t = 3x, dt = 3dx, dx = dt/3, -\pi \rightsquigarrow -3\pi, \pi \rightsquigarrow 3\pi$, pak
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\mathrm{d}x = \int_{-3\pi}^{3\pi} \sin(t)\frac{\mathrm{d}t}{3} = -\frac{1}{3}[\cos t]_{-3\pi}^{3\pi} = 0$$

Tabulka integrálů elementárních funkcí

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c$$

$$\int a\,\mathrm{d}x = ax + c$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c \text{ pro } x > 0, n \in \mathbb{R} \text{ a } n \neq -1$$. Pro přirozená n platí uvedený vzta

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \text{ pro } x \neq 0$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{ln(a)} + c \text{ pro } a > 0, a \neq 1$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c \text{ pro } x \neq n\pi$$, kde n je celé číslo.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c \text{ pro } x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$, kde n je celé číslo.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c_1 = -\operatorname{arccotg} x + c_2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + c_1 = -\arccos x + c_2 \text{ pro } -1 < x < 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c, & \text{pro } |x| \neq 1 \\ \operatorname{arctgh} x + c, & \text{pro } |x| < 1 \\ \operatorname{arccotgh} x + c & \text{pro } |x| > 1 \end{cases}$$