

# Rozklad na parciální zlomky

text neobsahuje přesné matematické definice, pouze jejich vysvětlení

**Máme:** nějaký "hnusný" podíl polynomů, jako třeba

$$\frac{x^2 + 7x + 1}{x(x-1)^3(x^2 + x + 1)^2}$$

**Chceme:** ho rozepsat na součet jednodušších zlomků (snáze se nám pak budou počítat limity, integrovat). Podle jakého pravidla rozepisujeme, to je vidět z příkladu:

$$\frac{x^2 + 7x + 1}{x(x-1)^3(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1} + \frac{Ex + F}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Gx + H}{x^2 + x + 1}$$

Abychom ho mohli takto rozložit, je třeba, aby zlomek byl ve tvaru tzv. *ryze lomené funkce*, což zjednodušeně znamená, že stupeň polynomu v čitateli je menší než ve jmenovateli (pokud tomu tak není, musíme čítec dělit jmenovatelem a dostat tak ryze lomenou fci).

**Příklad 1.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x + 3}{x^2 + x + 2}$$

*Řešení:* Funkce je ryze lomená, protože stupeň v čitateli je menší než ve jmenovateli. Polynom ve jmenovateli lze rozložit na  $x^2 + x + 2 = (x + 2)(x - 1)$  (odhadneme/dopočítáme pomocí Hornerova schématu).

Rozklad je tedy:

$$\frac{x + 3}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

Abychom určili neznámé koeficienty  $A, B$ , vynásobíme obě strany rovnice společným jmenovatelem  $(x + 2)(x - 1)$ :

$$\begin{aligned}x + 3 &= A(x + 2) + B(x - 1) \\x + 3 &= (A + B)x + 2A - B\end{aligned}$$

a

$A$  teď už jen porovnáme koeficienty u stejných mocnin (u  $x^1$  a  $x^0$ ):

$$\begin{aligned}1 &= A + B \\3 &= 2A - B\end{aligned}$$

$\Rightarrow A = 4/3, B = -1/3$  A tedy výsledný rozklad:

$$\frac{x+3}{x^2+x+2} = \frac{4/3}{x-1} + \frac{-1/3}{x+2}$$

**Příklad 2.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1}$$

. Řešení: funkce není ryze lomená, proto musíme podělit polynomy v čitateli a jmenovateli (algoritmus dělení polynomů lze snadno vygooglit):

$$(x^2 - x + 4) : (x^2 + 2x + 1) = 1 + \frac{-3x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$

Na parciální zlomky rozložíme jen ryze lomený zbytek  $\frac{-3x+3}{x^2+2x+1} = \frac{-3x+3}{(x+1)^2}$ .

$$\begin{aligned} \frac{-3x+3}{(x+1)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} \\ -3x+3 &= B + A(x+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow B = 6, A = -3$ .

Výsledek:

$$\frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 2x + 1} = 1 + \frac{-3}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}$$

**Příklad 3.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$\left[ = \frac{1/3}{x-1} + \frac{(-1/3)x+2/3}{x^2+2} \right]$$

**Příklad 4.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{3x+2}{x^2+x}$$

$$\left[ = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} \right]$$

**Příklad 5.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}$$

$$\left[ = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^3} \right]$$

**Příklad 6.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x-3}{x^3+3x}$$

$$\left[ = \frac{-1}{x} + \frac{x+1}{x^2+3} \right]$$

**Příklad 7.** Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^5 - 2x^4 + x^3 + x + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

$$\left[ = x^2 + \frac{2x^2+x+5}{(x^2+1)(x-2)} = x^2 + \frac{3}{x-2} + \frac{-x-1}{x^2+1} \right]$$