

1. zápočtová písemka MB102

ŘEŠENÍ

15.3.

celkem max 10 bodů

Příklad 1. (1b) Interpolujte funkci $f(x)$ Lagrangeovým polynomem a z něj určete hodnotu funkce v bodě $x = 1$, víte-li, že

x	0	2	3
$f(x)$	1	0	1

$$\text{Lagrange: } f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(-2)(-3)} + \frac{x(x-2)}{3} = \frac{x^2-3x+2}{2} = [1] = 0$$

Příklad 2. (2b) Rozložte na parciální zlomky:

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 1}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x + 2}{x^2 + 1} + \frac{2x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

Příklad 3. (1b) Spočtete limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} x \right) \ln x \right] = \frac{\sin(\pi x/2) \ln x}{\cos(\pi x/2)} = \left[\frac{0}{0} \right] = -\frac{2}{\pi}$$

Příklad 4. (1b) Derivujte

$$f(x) = (\sin x)^{1/x} = e^{\frac{1}{x} \ln(\sin x)}$$

$$f(x)' = (\sin x)^{1/x} \left[-\frac{1}{x^2} \ln(\sin x) + \frac{\cos x}{x \sin x} \right]$$

Příklad 5. (2b)

Najděte derivaci implicitně zadané funkce $y = y(x)$ v bodě $[x, y(x)] = [1, 2]$

$$x^2 + y^3 = 9$$

(1b)

$$2x + 3y^2 y' = 0$$

(1b)

$$y' = \frac{-2x}{3y^2} = [1, 2] = -\frac{1}{6}$$

Nebo lze vyjádřit y z rovnice a následně je zderivovat (zdlouhavější).

Příklad 6. (3b) Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $y = (1 + 3x)^{e^x}$ v bodě $[0, f(0)]$. (1b)

$$f(x)' = [e^{e^x \ln(1+3x)}]' = e^{e^x \ln(1+3x)} \left[e^x \ln(1 + 3x) + e^x \frac{3}{1 + 3x} \right]$$

(1b) $f(0) = 1, f(0)' = 3,$

(1b)

$$t : y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$t : y = 3x + 1$$