DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

$y' = F(x,y)$ → např. $y' = 2x + y$, $y' = 2xy^2$, $y' = y^3 - x^2 y$

→ 1. řádu → nejvýše první derivace

$y' = [y(x)]' = \frac{dy}{dx}$ ... derivace y podle x

1) DR se separovanými proměnnými:

$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$ → proměnné x, y lze od sebe "separovat" → $\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx}$

Př. $y' = x(1-y)^2$

→ $f(x) = x$, $g(y) = (1-y)^2$

$$\underbrace{\int \frac{1}{(1-y)^2}\,dy}_{\frac{1}{1-y}} = \int x\,dx \;;\; y \neq 1$$

pozn. konstantu C u neurčitého integrálu stačí psát jen u $\int f(x)\,dx$
(představte si, že nám vyjde
$\sim + C_1 = \sim + C_2$
$\Rightarrow C = C_2 - C_1$)

$$\frac{1}{1-y} = x^2 + C$$

$\Rightarrow y = 1 - \frac{1}{x^2 + C}$ ... obecné řešení

$C \in \mathbb{R}$

Jsou to ale všechna řešení? Co takhle $y = 1$? (Ověřte dosazením)

Toto řešení jsme "ztratili" separací na začátku: $g(y) \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

Toto řešení nemůžeme získat žádnou volbou C → napíšeme ho zvlášť → celkem řešení: $y = 1 - \frac{1}{x^2 + C}$, $C \in \mathbb{R}$ ... obecné řešení

$y = 1$ ... singulární řešení

Př. $y' = y^2 + 1 \rightsquigarrow \underbrace{(y^2+1)}_{g(y)} \cdot \underbrace{1}_{f(x) = x^0}$

$\rightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int 1\, dx \longrightarrow \operatorname{arctg} y = x + C \;/ tg$

$y = tg(x+C)$, $C \in \mathbb{R}$ ... obecné řešení

2) DR převoditelné na DR se sep. prom.

$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$ → substituce $\boxed{u(x) = y/x}$ ⇒ $y = x \cdot u(x) \;/ \frac{d}{dx}$

$y' = u(x) + x\,u'(x)$ ... (1)

dosazením do zadání ... (2)

⇒ máme 2 rovnice $y' = \sim$ → dáme do rovnosti, vypadne y', y ⇒

⇒ získáme novou DR : $u' = F(x, u)$, kterou se už dá řešit

pomocí separace proměnných → vyřešíme $u(x)$ → získáme y

Př. $xy' = y \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$

$\rightarrow y' = \frac{y}{x} \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow u = y/x \rightarrow y' = u + xu'$ ... (1)

$y' = u \cdot \ln u$ ... (2)

$u \neq 0$

$\ln u \neq 1 \Rightarrow u \neq e$

$\Rightarrow u + xu' = u \cdot \ln u \rightarrow u' = \frac{u \ln u - u}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{u \ln u - u}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$

$\rightarrow \int \frac{1}{\underbrace{u \cdot \ln u - u}_{u \cdot (\ln u - 1)}}\, du = \left| \begin{array}{l} t = \ln u - 1 \\ dt = \frac{1}{u}\, du \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|\ln u - 1|$

$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$; $= \ln|Kx|$, $K \neq 0$

$\rightarrow \ln|\ln u - 1| = \ln|Kx| \rightarrow \ln u - 1 = Kx \rightarrow \overbrace{\ln y/x}^{\ln y - \ln x} = Kx + 1$

$\rightarrow \ln y = Kx + 1 + \ln x \Rightarrow y = e^{Kx + 1 + \ln x} = e^{Kx} \cdot e \cdot x$, $K \neq 0$

Ověření singulárních řešení:

1) $u = y/x \neq 0 \Rightarrow y \neq 0$ … vůbec (z definice logaritmu)

2) $u = y/x \neq e \Rightarrow y \neq e \cdot x$ … získáme volbou $k = 0$

je řešením (ověřte dosazením do zadání)

$\Rightarrow$ celkem obecné řešení: $\underline{y = e^{kx} \cdot e \cdot x}$, $\underline{k \in \mathbb{R}}$

Př. $xy' = y \cdot \ln(y/x)$, počáteční podmínka: $y(1) = e^2$

$\Rightarrow$ chceme určit jedno konkrétní = partikulární řešení, které prochází bodem $[1, e^2]$

$\Rightarrow$ 1) určíme obecné řešení: $y = e^{kx} \cdot e \cdot x$, $k \in \mathbb{R}$

2) dosadíme do něho počáteční podmínku a určíme tak k:

$$e^2 = e^{k \cdot 1} e \cdot 1 = e^k \cdot e = e^{k+1} \Rightarrow 2 = k + 1 \Rightarrow \underline{k = 1}$$

$\Rightarrow$ partikulární řešení: $y = e^x \cdot e \cdot x = \underline{x \cdot e^{x+1}}$

3) lineární DR 1. řádu:

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

$\rightarrow$ homogenní: $b(x) \equiv 0 \rightarrow$ DR se sep. prom.

$\rightarrow$ nehomogenní: $b(x) \not\equiv 0$

$\rightarrow$ řešení ve tvaru

$$\boxed{y = e^{\int a(x)dx} \cdot \left[\int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx} dx + C\right]}$$

(odvození viz přednášky)

4

Př. $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$

$\Rightarrow y' = -2xy + xe^{-x^2} \longrightarrow a(x) = -2x,\ b(x) = xe^{-x^2}$

$\rightarrow \int a(x)\,dx = \int -2x\,dx = -x^2$

$\rightarrow \int b(x) \cdot e^{-\int a(x)dx}\,dx = \int x \cdot e^{-x^2} \cdot e^{x^2}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow y = e^{\int a(x)dx}\left[\int b(x) e^{-\int a(x)dx}\,dx + C\right) = e^{-x^2}\left(\frac{x^2}{2} + C\right),\ C \in \mathbb{R}$

4) DR převoditelné na lineární DR 1. řádu

Bernoulliova rovnice: $\boxed{y' = a(x)y + b(x)y^n}$ ← navíc

$\rightarrow$ substituce $\boxed{u(x) = y^{1-n}} \longrightarrow u'(x) = (1-n)y^{-n} \cdot y' \Rightarrow y' \cdot y^{-n} = \frac{u'(x)}{1-n} \ldots (1)$

$y' = a(x)y + b(x) \cdot y^n \,/\cdot y^{-n}$

$y' \cdot y^{-n} = a(x) \cdot y^{1-n} + b(x) = a(x) \cdot u + b(x) \ldots (2)$

$\Rightarrow$ dáme (1) a (2) do rovnosti $\Rightarrow u' = \underbrace{(1-n)a(x)}_{\text{"}a(x)\text{"}} \cdot u + \underbrace{(1-n)b(x)}_{\text{"}b(x)\text{"}} \ldots$ LDR

Př. $y' + y = x\sqrt{y}$

$\rightarrow y' = -y + x\sqrt{y} \quad \Rightarrow n = 1/2 \quad \Rightarrow u(x) = y^{1-1/2} = y^{1/2}$

$\rightarrow u' = \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot y' \Rightarrow y' \cdot y^{-1/2} = 2u'$

$y' \cdot y^{-1/2} = -y \cdot y^{-1/2} + x \cdot y^{1/2} \cdot y^{-1/2} = -u + x \Big\}\ u' = -\frac{u}{2} + \frac{x}{2}$ LDR

$\ldots \Rightarrow y = \left(x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2,\ C \in \mathbb{R}$

APLIKACE DR 1. ŘÁDU

- radioaktivní rozpad → zadán poločas rozpadu = počáteční podmínka
  → hledáme čas, za který se z množství Q_0 stane $Q = kQ_0$

→ $Q(t)$ ... množství látky v čase t ⇒ řešíme $\boxed{Q' = -r \cdot Q}$, $r > 0$

Q' ... změna Q tempem $-rQ$ ... záporné, protože látky ubývá

⇒ řešením $\boxed{Q = Q_0 \cdot e^{-rt}}$ → z poč. podmínky určíme r

$+ Q = kQ_0 \Rightarrow k = e^{-rt} \rightarrow \ln k = -rt \Rightarrow \boxed{t = \frac{\ln k}{-r}}$

Př. Poločas rozpadu izotopu radia je 1590 let, tj. počáteční množství se za tuto dobu zmenší na polovinu. Určete, za jak dlouho se počáteční množství sníží o 25%.

→ naše poč. podmínka je: $Q = \frac{1}{2} Q_0$ (nebo přesněji: $Q(0) = Q_0$

poč. podm. → $\boxed{Q(1590) = \frac{1}{2} Q_0}$

tohle chceme → $Q(t_1) = 3/4\, Q_0$, $t_1 = ?$)

→ řešíme $Q' = -r \cdot Q \Rightarrow$ (DR se sep. prom.) $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$

1) poč. podm.: $\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 \cdot e^{-rt} = \frac{1}{2} = e^{-rt}$

$t = 1590 \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-r \cdot 1590} \rightarrow \ln \frac{1}{2} = -r \cdot 1590$

$\rightarrow r = \frac{-\ln 1/2}{1590} = \frac{\ln 2}{1590}$

2) chceme $Q = 3/4\, Q_0 \Rightarrow \frac{3}{4} = e^{-rt} \Rightarrow \ln 3/4 = -r \cdot t \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{\ln 4/3}{r} = \frac{1590 \cdot \ln 4/3}{\ln 2} \doteq \underline{\underline{660 \text{ let}}}$

• <u>výměna tepla mezi tělesem a okolím</u> – povrchová teplota tělesa se mění rychlostí, která je přímo úměrná rozdílu teploty tělesa a okolního prostředí (= Newtonův teplotní zákon)

→ zadány teplota okolí a výchozí a konečná teplota tělesa

→ hledáme čas t, který uběhl mezi měřeními

→ $T(t)$ ... teplota tělesa v čase t, T_0 ... teplota okolí

⇒ řešíme $\boxed{T'(t) = -k\left[T(t) - T_0\right]}$, $k > 0$ → řešení $\boxed{T = T_0 + Ce^{-kt}}$

⇒ pokud je $T(t) > T_0$ (těleso je teplejší, než okolí), pak $T'(t) < 0$ ⇒ těleso se ochlazuje

–||– $T(t) < T_0$, pak $T'(t) > 0$ ⇒ –||– zahřívá

$\boxed{\text{Př.}}$ v čase $t_0 = 0$ minut má čaj v hrnku teplotu 100°C a za 10 minut poté už jen 80°C, přičemž teplota okolního vzduchu je $T_0 = 22$°C. Určete, za jak dlouho bude mít čaj teplotu 60°C.

$$\Rightarrow T' = -k\left[T - 22\right] \xrightarrow{\text{DR se sep. prom.}} T = 22 + Ce^{-kt},\ C \in \mathbb{R}$$

→ konstant C a k se zbavíme pomocí počátečních podmínek:

1) $t = 0 \to T = 100$: $100 = 22 + C \cdot e^0 \to C = 78$

2) $t = 10 \to T = 80$: $80 = 22 + 78 \cdot e^{-k \cdot 10} \Rightarrow \frac{58}{78} = e^{-10k} \Rightarrow \ln {}^{58}/_{78} = -10k$

$$\Rightarrow k = \frac{\ln {}^{78}/_{58}}{10}$$

→ chceme určit t pro $T = 60$

$$\Rightarrow 60 = 22 + 78 \cdot e^{-\frac{t}{10} \cdot \ln {}^{78}/_{58}} \Rightarrow \frac{38}{78} = e^{\frac{t}{10} \cdot \ln {}^{58}/_{78}} = \left(\frac{58}{78}\right)^{t/10} \Rightarrow \ln \frac{38}{78} = \frac{t}{10} \cdot \ln \frac{58}{78}$$

$$t = 10 \cdot \frac{\ln {}^{38}/_{78}}{\ln {}^{58}/_{78}} \doteq 24{,}3 \text{ min}$$

→ na začátku už 100 litrů ⇒ za jak dlouho přiteče těch zbývajících 900 litrů?

→ voda přitéká $v_1 = 2\ l/min$, odtéká $v_2 = 1\ l/min$

⇒ nádrž se naplňuje rychlostí $v_1 - v_2 = 1\ l/min$

→ 900 litrů přiteče za 900 minut ⇒ $t = 900$

$$\rightarrow Q(900) = 10(100+900) + \frac{2\cdot 10^5}{100+900} = 10000 + 2\cdot 10^2 = \underline{10200\,g}$$

My chceme koncentraci ⇒ podělíme to množstvím vody ⇒

$$\Rightarrow C = \frac{10200}{1000} = \underline{\underline{10{,}2\ g/l}}$$

- **míchání dvou látek** – např. voda a do ní roztok soli, nebo voda (jezero) a do ní nečistoty z továrny

→ zadáno počáteční množství vody (a koncentrace) a rychlosti, s jakou do vody přitéká a odtéká roztok (nečistoty) a koncentrace

→ hledáme množství soli (nečistot) ve vodě v libovolném čase t (→ obecnou rovnici v proměnné t), nebo najít čas t, kdy bude ve vodě konkrétní množství soli (nečistot) (neboli z obecné rovnice určíme t).

→ $Q(t)$ … množství soli / roztoku ve vodě v čase t

⇒ řešíme $\boxed{Q'(t) = \begin{pmatrix}\text{rychlost, s jakou} \\ \text{sůl přitéká}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{rychlost, s jakou} \\ \text{sůl vytéká}\end{pmatrix}}$

→ rychlost přitékání: $c_1 \cdot v_1$, v_1… rychlost, c_1… koncentrace

→ rychlost odtékání: $c_2 \cdot v_2$, v_2… rychlost, $c_2 = \dfrac{Q(t)}{L + (v_1 - v_2)(t - t_0)}$

L … celkový „objem" vody na začátku

→ řešíme $\boxed{Q'(t) = c_1 \cdot v_1 - \dfrac{Q(t)}{L + (v_1 - v_2)(t - t_0)} \cdot v_2}$ … lineární DR 1. řádu

→ „$a(t)$" $= -\dfrac{1}{L + (v_1 - v_2)(t - t_0)} \cdot v_2$, „$b(t)$" $= c \cdot v_1$

Př. Nádrž o celkovém objemu 1000 litrů obsahuje 100 litrů mořské vody o koncentraci 30 gramů soli na litr. Do nádrže přitéká rychlostí 2 litry za minutu zředěná mořská voda o koncentraci 10 gramů na litr. Po důkladném promíchání vytéká roztok z nádrže rychlostí 1 litr za minutu. Určete množství soli (v gramech) v nádrži v libovolném čase t a koncentraci soli v nádrži (v gramech na litr) v okamžiku, kdy se nádrž zcela naplní. P

$\Rightarrow L = 100\ l,\ v_1 = 2\ l/min,\ c_1 = 10\ g/l,\ v_2 = 1\ l/min$

$$c_2 = \frac{Q(t)}{L + (v_1 - v_2)(t - t_0)} = \frac{Q(t)}{100 + t}$$

$\Rightarrow$ řešíme $Q'(t) = 10 \cdot 2 - \dfrac{Q(t)}{100+t} \cdot 1$ s poč. podm. $Q(0) = 100 \cdot 30\,g$

množství soli ve 100 l vody

$\rightarrow$ lineární DR $\rightarrow a(t) = \dfrac{-1}{100+t},\ b(t) = 20$

$\rightarrow \int a(t)\,dt = -\ln(100+t)$

$$\int b(t) e^{-\int a(t)\,dt}\,dt = \int 20 \cdot e^{\ln(100+t)}\,dt = \int 20(100+t)\,dt =$$

$$= 20 \cdot \frac{(100+t)^2}{2} = 10(100+t)^2$$

$$\Rightarrow Q(t) = (100+t)^{-1}\left[10 \cdot (100+t)^2 + C\right] = 10(100+t) + \frac{C}{100+t}$$

$\rightarrow$ zbavíme se C pomocí poč. podm.:

$$3000 = 10(100+0) + \frac{C}{100+0} = 1000 + \frac{C}{100} \Rightarrow C = 2 \cdot 10^5$$

$\Rightarrow Q(t) = 10(100+t) + \dfrac{2 \cdot 10^5}{100+t}$ ... množství soli (v gramech) v čase t

$\rightarrow$ my chceme koncentraci v čase t, kdy bude nádrž plná