Př. 1 (5 bodů)

Hermiteův interpolační polynom $P(x): P(0)=2, P'(0)=0, P(1)=1, P'(1)=0$

$\rightarrow$ 4 podmínky $\Rightarrow$ výsledný polynom bude st. 3

$$\Rightarrow P(x)=ax^3+bx^2+cx+d \rightarrow P'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\left.\begin{aligned} P(0)=2 &: \boxed{2=d} \\ P(1)=1 &: 1=a+b+c+d \\ P'(0)=0 &: \boxed{0=c} \\ P'(1)=0 &: 0=3a+2b+c \end{aligned}\right\}$$ 4 rovnice o 4 neznámých

$$1=a+b+2 \longrightarrow a=-b-1 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$0=3a+2b$$

$$0=-3b-3+2b \Rightarrow \boxed{b=-3}$$

$$\Rightarrow P(x)=2x^3-3x^2+2$$

$\rightarrow$ kontrola:

$P(0)=2: \quad 2=2$ ✓

$P(1)=1: \quad 1=2-3+2=1$ ✓

$P'(0)=0: \quad 0=0$ ✓ $\longleftarrow P'(x)=6x^2-6x$

$P'(1)=0: \quad 0=6-6=0$ ✓

Př. 2 (5 bodů)

Rozložit $R(x)=\dfrac{7x+2}{x^3+8}$ na parciální zlomky

vzorec $A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$ nebo pomocí Hornera:

x^3+8

	1	0	0	8
-2	1	-2	4	0

$\underbrace{1 \; -2 \; 4}_{x^2-2x+4}$

$$\Rightarrow R(x)=\frac{7x+2}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4} \quad \Big| \cdot (x^3+8)$$

$$7x+2=A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)$$

$$\left.\begin{aligned} x^0&: \; 2=4A+2C \\ x^1&: \; 7=-2A+2B+C \\ x^2&: \; 0=A+B \end{aligned}\right\}$$ 3 rovnice o 3 neznámých

$\ldots\ldots \rightarrow \boxed{A=-1}, \boxed{B=1}, \boxed{C=3}$

$$\Rightarrow R(x)=-\frac{1}{x+2}+\frac{x+3}{x^2-2x+4}$$

$\rightarrow$ kontrola: $-\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x^2-2x+4}=\dfrac{\overbrace{-(x^2-2x+4)+(x+3)(x+2)}^{7x+2}}{\underbrace{(x+2)(x^2-2x+4)}_{x^3+8}}$ ✓

Př. 3 (5 bodů)

Vypočítat $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$ dvěma způsoby

1) $\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

2) $\underbrace{\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}}_{\frac{0}{0}} \overset{LH}{=} \lim_{x \to 1} \frac{2x}{3x^2} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$