

Nekonečné řady

Příklad 1: Rozhodněte o konvergenci/divergenci následujících řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1}$$

[diverguje]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

[diverguje]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$$

[diverguje]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5n - 2}$$

[diverguje]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n+2} \right)^n$$

[konverguje absolutně]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}$$

[diverguje]

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n + 100}$$

[konverguje relativně]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

[diverguje]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

[konverguje]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}$$

[konverguje]

Příklad 2: Určete, poloměr konvergence a obor konvergence následujících řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$$

$$[R = 1, I = [-4, 2]]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n$$

$$[R = 0, I = 5]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$$

Pozn.: Proveďte substituci $2n = k$

$$[R = \frac{1}{\sqrt{2}}, I = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

$$[R = 1, I = (-1, 1)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-1)^{2n}$$

$$[R = 1, I = (0, 2)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$[R = 1, I = (-1, 1)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$[R = 1, I = [-1, 1]]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

$$[R = 1, I = (-1, 1)]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

$$[R = 1, I = [-1, 1]]$$

Příklad 3: Určete součet následujících řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$[-\ln|1-x|]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$[\ln|1+x|]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$[x \ln|1+x| - x + \ln|1+x|]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n-1}$$

$$[x \operatorname{arctg} x - x^2]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n}$$

$$\left[\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n$$

$$\left[\frac{3x^2-x^3}{x(1-x)^3} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{3^n}$$

$$[3]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\left[\frac{1+x}{(1-x)^3} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

$$\left[\frac{x+x^2}{(1-x)^3} \right]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

$$[6]$$

Příklad 4: Určete Maclaurinovu řadu pro funkce $\sin x$, $\cos x$, e^x , $\ln(x + 1)$ a pomocí nich určete Maclaurinovy řady následujících funkcí

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right]$$

$$\sin(2x)$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$\cos(x^3)$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} \right]$$

$$\ln \frac{1}{1+x}$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \right]$$