

Domácí úkol č. 4

1. Určete limity (pomocí L'Hospitalova pravidla):

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + 1}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cotg x - \frac{1}{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2}$

2. Určete monotónost funkce, její lokální extrémů a intervaly konvexnosti a konkávnosti:

a) $f(x) = x - 2 \sin x$, $D(f) = (0, 2\pi)$

b) $g(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}$, $D(f) = ?$ (bez konvexnosti a konkávnosti)

c) $h(x) = x \cdot (x-4)^3$, $D(f) = ?$

3. Určete konvexnost a konkávnost funkce:

$f(x) = \sqrt[5]{x^3}$, $D(f) = ?$

Řešení:

1.

a) $\frac{\pi^2}{2}$

b) 1

c) $\frac{1}{6}$

d) 0

e) $\frac{1}{6}$

2.

a) klesající na: $x \in (0, \frac{\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$, rostoucí na: $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$

lok min v $x = \frac{\pi}{3}$, lok max v $x = \frac{5\pi}{3}$

konvexní na: $x \in (\pi, 2\pi)$, konkávní na $x \in (0, \pi)$

b) klesající na: $x \in (0, e)$, rostoucí na: $x \in (e, \infty)$

lok min v $x = e$, lok max není

c) klesající na: $x \in (-\infty, 1)$, rostoucí na: $x \in (1, \infty)$

lok min v $x = 1$, lok max není

konvexní na: $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$, konkávní na $x \in (2, 4)$

3. konvexní na: $x \in (-\infty, 0)$, konkávní na $x \in (0, \infty)$