CVIČENÍ 10

Bodová konvergence: $\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall n \geq n_0 \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Stejnoměrná konvergence: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in I \ \forall n \geq n_0: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

1) Rozhodněte, zda p-st f-cí $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $[0;1]$ stejnoměrně konverguje.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = 0 \Rightarrow \text{limitní f-ce } f(x) = 0.$$

Ověříme, zda se jedná o stejnoměrnou konvergenci.
Buď si všimneme, že $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ nebo hledáme absolutní extrém f-ce $\frac{2nx}{1+n^2x^2}$ na $[0;1]$ vzhledem k x.

$$\left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{2n(1+n^2x^2) - 2nx(2n^2x)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n + 2n^3x^2 - 4n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} =$$

$$= \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$\frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2} = 0 \iff 2n(1-n^2x^2) = 0$$

$$n = 0 \quad \vee \quad 1 - n^2x^2 = 0$$

$$0 \notin \mathbb{N} \qquad n^2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{n^2}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n} \notin [0;1] \Rightarrow x = \frac{1}{n}$$

$$x = \frac{1}{n}: \quad f_n(x) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

Nechť $0 < \varepsilon < 1$. Pak $\forall x = \frac{1}{n} \in [0,1)$ musí platit, že
$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2} - 0\right| < \varepsilon$, aby byla řada stejnoměrně konvergentní.

$\overset{\shortparallel}{1} > \varepsilon \Rightarrow$ řada není stejnoměrně konvergentní

Kritéria stejnoměrné konvergence

Weierstrass: Mějme p-st nezáporných čísel $\{a_n\}$ takovou, že řada $\sum a_n$ konverguje a $\forall x \in I\ \forall n \in \mathbb{N}$ současně platí $|f_n(x)| \le a_n$. Pak $\sum f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I.

Dirichlet-Abel: Mějme $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ p-sti na I, kde $\{g_n(x)\}$ je monotónní na I.

1) (Dirichlet) Pokud $\sum f_n(x)$ má stejnoměrně ohraničenou p-st částečných součtů $\{s_n(x)\}$ a $\sum g_n(x)$ konverguje stejnoměrně k nule na I

nebo

2) (Abel) pokud $\sum f_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I a $g_n(x)$ je stejnoměrně ohraničená na I,

potom $\sum f_n(x) g_n(x)$ stejnoměrně konverguje na I.

Důsledek: P-st částečných součtů $\{s_n(x)\}$ řady $\sum f_n(x)$ je stejnoměrně ohraničená na I, $\{a_n\}$ je monotónní p-st čísel, kde $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak $\sum a_n f_n(x)$ konverguje stejnoměrně na I.

Jednodušší: Nechť $a_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)|,\ x \in I\}$. Pak $f_n(x)$ konverguje stejnoměrně k $f(x)$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2) Rozhodněte, zda řada fcí stejnoměrně konverguje v $\mathbb{R}$.

$$\sum \frac{\sin nx}{n^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad |\sin nx| \leq 1$, a tedy $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ je nezáporná a konverguje $\Rightarrow \sum \frac{\sin nx}{n^2}$ podle Weierstrassova kritéria konverguje stejnoměrně.

3) Dokažte, že řada $\sum \frac{\sin nx}{n}$ konverguje stejnoměrně na $[\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$.

Položme $f_n(x) = \sin nx$, $a_n = \frac{1}{n}$.

$$s_n(x) = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{n}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} =$$

$$|s_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} \text{ pro } x \in [\delta, 2\pi - \delta] \qquad = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$$

$\{a_n\}$ je nerostoucí a platí $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Podle Dirichletova kritéria tedy $\sum \frac{\sin nx}{n}$ konverguje stejnoměrně na $[\delta, 2\pi - \delta]$.

4) Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci $f_n(x) = x^n$, $x \in [0; 1)$.

$\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ pro $|x| < 1 \Rightarrow f(x) = 0$

$a_n = \sup\{|x^n - 0|, x \in [0, 1)\} = \sup\{x^n, x \in [0, 1)\} = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ není stejnoměrně konvergentní.

5, Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx = \left.\begin{cases} \frac{\pi}{2} & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\frac{\pi}{2} & x<0 \end{cases}\right\} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$$

$a_n = \sup \{ |\operatorname{arctg} nx - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x| ;\ x \in \mathbb{R} \} = \frac{\pi}{2} \neq 0 \Rightarrow$ není stejnoměrně konvergentní.

6, Ukažte, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx$, $0<r<1$, má spojitý součet $s(x)$ na $\mathbb{R}$ a určete $\int\limits_0^{2\pi} s(x)\,dx$.

$$|r^n \cos nx| \leq r^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\sum r^n$ je geometrická řada s $q<1 \Rightarrow$ konverguje, a tedy dle Weierstrassova kritéria $\sum r^n \cos nx$ konverguje stejnoměrně, a proto $r^n \cos nx$ je spojité $\Rightarrow s(x)$ je spojitý.

$$\int_0^{2\pi} s(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos nx \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \cos nx \, dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} r^n \cos nx\,dx = 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(\frac{0}{n} - \frac{0}{n} \right) = \underline{\underline{2\pi}}$$

Mocninné řady

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, kde x_0 se nazývá střed řady,

$a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

poloměr konvergence: $R = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ nebo

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Pak pokud $R = \infty$, řada konverguje absolutně,

pokud $R = 0$, řada diverguje,

pokud $|x| < R$, řada absolutně konverguje pro $0 < R < \infty$

a pokud $|x| > R$, řada diverguje pro $0 < R < \infty$.

obor konvergence: $x : |x| < R$

Př. Určete poloměr konvergence a obor konvergence:

$\sum \frac{x^n}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

řada je absolutně konvergentní pro $|x| < 1$, tj. $x \in (-1, 1)$.

$x = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ ... harmonická řada $\Rightarrow$ diverguje

$x = -1$: $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ ... Leibnizova řada $\Rightarrow$ konverguje

obor konvergence $x \in [-1; 1)$

8, Určete poloměr konvergence a součet mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$. Pomocí získaného výsledku sečtěte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n+1} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow \quad x \in (-1; 1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = x \cdot \left(\frac{x}{1-x} \right)' = x \cdot \frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

pro $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2$

9, Určete poloměr konvergence a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

$$R = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[4n-3]{\frac{1}{4n-3}} = 1 \Rightarrow \quad x \in (-1; 1)$$

derivace člen po členu: $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3} \cdot (4n-3) \cdot x^{4n-4} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4} =$

$= 1 + x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + \ldots = \frac{1}{1-x^4}$ pro $x \in (-1; 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3} = \int_0^x \frac{1}{1-t^4} dt = *$$

$$\frac{1}{1-t^4} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} + \frac{Ct+D}{1+t^2}$$

$$1 = A(1+t)(1+t^2) + B(1-t)(1+t^2) + (Ct+D)(1-t^2)$$

$$1 = A(1+t^2+t+t^3) + B(1+t^2-t-t^3) + Ct - Ct^3 + D - Dt^2$$

$A - B - C = 0 \Rightarrow A = B + C$

$A + B - D = 0$

$A - B + C = 0$

$A + B + D = 1$

$B + C + B - D = 0$

$B + C - B + C = 0$

$B + C + B + D = 1$

$2B + C - D = 0$

$2C = 0 \Rightarrow \underline{C = 0}$

$2B + D = 1$

$2B - D = 0$

$2B + D = 1$

$D = 2B$

$2B + 2B = 1$

$4B = 1$

$B = \frac{1}{4}$

$A = \frac{1}{4}$

$$* = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt + \frac{1}{4} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \qquad x \in (-1; 1)$$