CVIČENÍ 5

Derivace implicitně zadané f-ce

1, $y^2 + \ln y + x^2 = 0$

$$2y \cdot y' + \frac{1}{y} \cdot y' + 2x = 0$$

$$y'\left(2y + \frac{1}{y}\right) = -2x$$

$$y' = \frac{-2xy}{2y^2+1}$$

2, $4y = x^3 + \cos y$

$$4y' = 3x^2 + (-\sin y) \cdot y'$$

$$y'(4 + \sin y) = 3x^2$$

$$y' = \frac{3x^2}{4 + \sin y}$$

3, $xe^x = y^2 + xy$

$$1 \cdot e^x + x \cdot e^x = 2y \cdot y' + 1 \cdot y + x \cdot y'$$

$$e^x + xe^x - y = y'(2y + x)$$

$$y' = \frac{e^x + xe^x - y}{2y + x}$$

L'Hospitalovo pravidlo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ je typu $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ a existuje-li

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

4) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

5) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

6) $\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x+3} - 1}{x+2} = \left|\frac{0}{0}\right| = \lim_{x \to -2} \frac{\frac{1}{2}(x+3)^{-\frac{1}{2}}}{1} =$

$= \frac{1}{2}(-2+3)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

7) $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{-\infty}{\infty}\right| = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$

8) $\lim_{x \to \infty} x \cdot \sin \frac{\pi}{x} = |\infty \cdot 0| = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \left|\frac{0}{0}\right| =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{x} \cdot \left(\pi \cdot \frac{(-1)}{\cancel{x^2}}\right)}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \to \infty} \pi \cdot \cos \frac{\pi}{x} = \pi \cdot \cos \lim_{x \to \infty} \frac{\pi}{x} =$

$= \pi \cdot \cos 0 = \pi$

Neurčité výrazy $0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty \Rightarrow f^g = e^{g\cdot \ln f}$

9, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left|1^\infty\right| = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \ |0\cdot\infty| = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} =$

$= \text{l'H } e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}{\cancel{-\frac{1}{x^2}}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{x+1}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right|$

$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x}}\right)}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1}} = \underline{\underline{e^1}}$

10, $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{\sin x} = \left|0^0\right| = \lim\limits_{x\to 0} e^{\sin x\cdot \ln(1-\cos x)} =$

$= |0\cdot(-\infty)| = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\sin x}}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-\cos x}\cdot\sin x}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\cos x}\cdot\frac{(-\sin^2 x)}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x\cdot(1-\cos^2 x)}{\cancel{(1-\cos x)}\cos x}\cdot\frac{1+\cos x}{\cancel{1+\cos x}}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+\overset{1}{\cos x})(-\overset{0}{\sin x})}{\underset{\searrow 1}{\cos x}}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$

Tečna a normála

tečna v bodě $T=[x_0, f(x_0)]$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

normála v bodě $T=[x_0, f(x_0)]$ (přímka kolmá k tečně procházející dotykovým bodem T): $y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$

$x = x_0 \quad f'(x_0) = 0$

$f'(x_0) = \pm\infty$: tečna $x = x_0$

normála $y = f(x_0)$

1) Napište rovnici tečny k f-ci $f(x) = x^3$ v bodě $[-1; ?]$

$f(x) = x^3 \Rightarrow T[-1; -1]$.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$x_0 = -1$

$f(x_0) = f(-1) = -1$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(x_0) = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$

$y = -1 + 3 \cdot (x - (-1)) = -1 + 3x + 3 = 3x + 2$

$\underline{y = 3x + 2}$

12) Napište rovnici normály k f-ci $f(x)=e^{2x}+\operatorname{tg} x^2$ v bodě $A[0;?]$.

$$f(x)=e^{2x}+\operatorname{tg} x^2 \Rightarrow A[0;\ 1+\operatorname{tg} 0] = A[0;1]$$

$$x_0=0$$

$$f(x_0)=1$$

$$f'(x)=e^{2x}\cdot 2+\frac{1}{\cos^2 x^2}\cdot 2x$$

$$f'(x_0)=e^0\cdot 2+\frac{1}{\cos^2 0}\cdot 2\cdot 0 = 2$$

$$y=1-\frac{1}{2}(x-0)=1-\frac{x}{2}$$

$$\underline{\underline{y=1-\frac{x}{2}}}$$

Průběh f-ce

1) definiční obor
2) spojitost, charakteristika bodů nespojitosti
3) lichost, sudost, periodicita
4) $f(x)=0$, intervaly, kde je f-ce kladná a kde záporná, průsečíky s osami
5) $f'(x)=0$, $D(f')$, stacionární body a body, ve kterých neexistuje derivace
6) intervaly monotonie
7) lokální a globální extrémy
8) $f''(x)=0$, $D(f'')$, body, ve kterých neexistuje 2. derivace
9) konvexnost, konkávnost, inflexní body
10) asymptoty se směrnicí a bez směrnice
11) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

12, hodnoty f-ce a první derivace ve významných bodech

13, graf f-ce

Je-li $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$, pak f je rostoucí.

Je-li $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$, pak f je klesající

Je-li $f'(x_0) = 0$, pak x_0 je stacionární bod. $\rightarrow$ lokální extrém může nastat buď ve stacionárním bodě nebo v bodě, kde derivace neexistuje

Pokud $\forall x < x_0 : f'(x) > 0$ a $\forall x > x_0 : f'(x) < 0$, pak v x_0 má f-ce ostré lok. minimum.

Je-li $f''(x_0) > 0$, $f'(x_0) = 0$, pak x_0 je ostré lok. minimum.

Pokud $f''(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$, pak x_0 je ostré lok. maximum.

Je-li $f''(x) > 0 \ \forall x \in I$, pak f je ostře konvexní.

Je-li $f''(x) < 0 \ \forall x \in I$, pak f je ostře konkávní

$f''(x_0) = 0$, x_0 je kritický bod. Je-li $f''(x_0) = 0$ a $\exists \mathcal{U}_\delta(x_0)$: $f''(x) < 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ a $f''(x) > 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ nebo naopak, pak x_0 je inflexní bod.

Je-li $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak x_0 je inflexní bod.

Asymptota bez směrnice: $x = x_0$, jestliže $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, nebo $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Asymptota se směrnicí: $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \quad a \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - ax)$$

a podobně pro $-\infty$.

13, Vyšetřete průběh f-ce $f(x) = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

$D(f) = R - \{3\}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \frac{4}{0} \begin{cases} x\to 3^+ = \infty \\ x \to 3^- = -\infty \end{cases} \Rightarrow$$ nespojitost 2. druhu

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{13}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}\right)} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-6x+13}{x-3} = -\infty$$

$$f(-x) = \frac{x^2+6x+13}{-x-3} \neq f(x)$$

$$-f(-x) = -\frac{x^2+6x+13}{-x-3} = \frac{x^2+6x+13}{x+3} \neq f(x)$$

není sudá ani lichá

není periodická

Průsečíky: $0 = \dfrac{x^2-6x+13}{x-3}$

$0 = x^2-6x+13$

$D = 36 - 4\cdot 13 = 36-52 = -16 \Rightarrow$ průsečíky s osou x nejsou

$f(0) = \dfrac{0^2-6\cdot 0+13}{0-3} = \dfrac{13}{-3} \Rightarrow$ průsečík s osou y: $[0, -\frac{13}{3}]$

$x^2-6x+13 > 0 \quad \forall x \in R$

$x-3 > 0 \quad \forall x > 3 \Rightarrow (3; \infty)$ je f-ce kladná

$x-3 < 0 \quad \forall x < 3 \Rightarrow (-\infty; 3)$ je f-ce záporná

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-6x+13}{x-3}\right)' = \frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+13)\cdot 1}{(x-3)^2} =$$

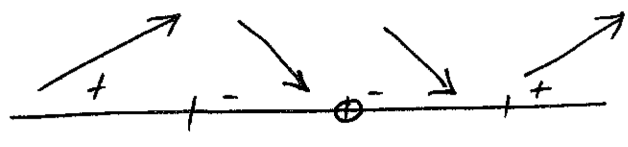
$$= \frac{2x^2-6x-6x+18-x^2+6x-13}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$$

$f'(x)=0$: $x^2-6x+5=0$

$D = 36-4\cdot 5 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

$(x-5)(x-1)=0$



$6: 36-30+5>0$

$0: 0^2-0+5>0$ $\quad 2: 4-12+5<0$ $\quad 4: 16-24+5<0$

lok. max. : 1, $f(1) = \frac{8}{-2} = -4$

lok. min. : 5, $f(5)=4$

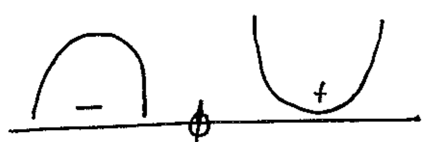
$$f''(x) = \left(\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x+5)\cdot 2(x-3)\cdot 1}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(2x-6)(x^2-6x+9)-2x^3+12x^2-10x+6x^2-36x+30}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{2x^3-12x^2+18x-6x^2+36x-54-2x^3+18x^2-46x+30}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{8x-24}{(x-3)^4} = \frac{8(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{8}{(x-3)^3}$$

$f''(x)=0$ nikde



$0: \frac{8}{(0-3)^3} < 0$ $\quad 3 \quad$ $5: \frac{8}{(5-3)^3}$

Asymptoty bez smernice: $x = 3$

Asymptoty so smernicou: $y = ax + b$

$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x(x-3)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = 1$$

$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = 1$$

$$b_1 = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x(x-3)}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x-3} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x + 13}{x-3} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left(-3 + \frac{13}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = -3$$

$$b_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(-3 + \frac{13}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)} = -3$$

$\underline{y = x - 3}$