Cvičení 13: Náhodný výběr z normálního rozdělení, intervalové odhady

Teorie:

Případ, kdy je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

- M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.
- $T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.

Intervaly spolehlivosti (jeden, resp. 2 výběry):

μ (známe σ^2)	$(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2})$
μ (neznáme σ^2)	$(M - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), M + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1))$
σ^2 (neznáme μ)	$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)$
$\mu_1 - \mu_2$ (známe σ_1^2, σ_2^2)	$M_1 - M_2 \pm \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \cdot u_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2$ (neznámé $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)	$M_1 - M_2 \pm S_* \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \cdot t_{1-\alpha/2}(m+n-2)$
podíl rozptylů σ_1^2/σ_2^2	$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1,n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1,n-1)}\right)$

Testování hypotéz:

Testování hypotéz umožňuje na základě náhodného výběru s danou pravděpodobností ověřovat domněnky o rozdělení, z něhož pochází daný náhodný výběr.

Hypotézou budeme rozumět nějaké tvrzení o parametrech tohoto rozdělení.
H_0 ... nulová hypotéza (např. $\theta = c$, kde c je domněnka o hodnotě parametru θ)
H_1 ... (oboustranná) alternativní hypotéza (obvykle negace nulové)
Testováním H_0 oproti alternativní hypotéze rozumíme postup založený na náhodném výběru, s jehož pomocí platnost H_0 *zamítneme* nebo *nezamítneme* (= připouštíme).

Chyba 1. druhu ... H_0 platí a my ji zamítneme (závažnější)
Chyba 2. druhu ... H_0 neplatí a my ji nezamítneme

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se nazývá *hladina významnosti* (α, obvykle $\alpha = 0,05$), pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β a číslo $1 - \beta$ se nazývá *síla testu*. Hypotézy budeme testovat pomocí příslušnosti do intervalu spolehlivosti – na základě realizace náhodného výběru sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámý parametr θ a zjistíme, zda c patří do tohoto intervalu. Pokud ano, hypotézu H_0 nezamítáme (v opačném případě zamítáme) na hladině významnosti α.

Příklad 169. Ze základního souboru, z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 0{,}06$ jsme pořidili náhodný výběr s realizacemi $1{,}3; 1{,}8; 1{,}4; 1{,}2; 0{,}9; 1{,}5; 1{,}7$. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu.

Výsledek. $1{,}22 \leq \mu \leq 1{,}58$.

Příklad 170. Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 nejsou známy. V následující tabulce jsou uvedeny četnosti jednotlivých realizací této náhodné veličiny.

x_i	8	11	12	14	15	16	17	18	20	21
četnost	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Vypočtěte:

- výběrový průměr,
- výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku,
- 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Výsledek. $14{,}025 \leq \mu \leq 16{,}663$

Příklad 171. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, 0{,}04)$. Určete nejmenší počet měření, který je třeba provést, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla 0,16.

Příklad 172. Byla provedena čtyři nazávislá měření obsahu manganu u dvou vzorků oceli a byly získány výsledky:

1. vzorek	0,31%	0,30%	0,29%	0,32%
2. vzorek	0,59%	0,57%	0,58%	0,57%

Stanovte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ za předpokladu, že jde o realizace náhodného výběru z normálního rozdělení s neznámými, ale shodnými rozptyly.

Příklad 173. Z velkého souboru resistorů téhož typu bylo náhodně vybráno 16 kusů s výběrovým průměrem hodnot odporu $9{,}3\,\mathrm{k}\Omega$. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výběr pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 10\,\mathrm{k}\Omega$, za předpokladu, že:

a) $\sigma^2 = 4\,\mathrm{k}\Omega$,

b) σ^2 není známo a $S^2 = 6{,}25\,\mathrm{k\Omega}$.

Výsledek. a) zamítáme, b) nezamítáme.

Příklad 174. Na dvou soustruzích se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 16 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 25 z produkce druhého soustruhu. Příslušné výběrové průměry jsou 37,5 mm, resp. 36,8 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}1$.

Příklad 175. Na šachový turnaj má být vybrán jeden zástupce ze dvou oddílových šachistů, a to ten, jehož výkon je stabilnější (má menší rozptyl). Procentuální úspěšnost z posledních turnajů je:

A	49,6	59,4	59,5	76,8	69,4	70,9	68,1	66,3
B	38,5	51,2	79,5	72,3	86,5			

Na hladině významnosti 0,05 testujte, zda je možno rozhodnout o tom, který z hráčů se má turnaje zúčastnit.