3 Cvičení 3: Grupa permutací a podgrupy generované množinou

Teorie: V tomto cvičení se budeme zabývat permutacemi. Na závěr si ještě ukážeme několik příkladů na podgrupy generované danou množinou.

Definice 15. Libovolné bijektivní zobrazení na konečné neprázdné množině nazýváme permutace.

BÚNO můžeme předpokládat danou konečnou množinu ve tvaru $\{1, 2, \dots, n\}$.

Díky tomu, že složením dvou bijekcí je opět bijekce, můžeme dané permutace skládat. Skládání zobrazení je navíc asociativní. Dále identické zobrazení je zřejmě také permutace a chová se jako neutrální prvek vzhledem ke skládání permutací. Navíc ke každému bijektivnímu zobrazení existuje zobrazení inverzní, které je také bijekcí. Odvodili jsme tak, že množina všech permutací na konečné neprázdné množině tvoří grupu.

Permutaci můžeme zadat několika způsoby:

1. Obrazem každého prvku, tzv. dvouřádkovým zápisem
2. Jako součin nezávislých cyklů (až na pořadí jednoznačný zápis)
3. Jako součin transpozic (nejednoznačný zápis)

Dále můžeme definovat tzv. grupu symetrií. Jedná se o množinu shodných zobrazení, které nechají daný útvar na místě.

V minulém cvičení jsme si dokázali, že průnikem podgrup je podgrupa. Můžeme tedy pro libovolnou podmnožinu dané grupy definovat podgrupu generovanou danou množinou jako průnik všech podgrup obsahujících danou množinu.

Příklad 42. Jsou dány permutace ρ, σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

1. Zapište permutace ρ, σ jako součin nezávislých cyklů.
2. Rozložte permutace ρ, σ na součin transpozic a podle počtu transpozic určete jejich paritu.
3. Určete počet inverzí permutací ρ, σ a podle počtu inverzí určete jejich paritu.
4. Určete $\sigma \circ \rho$ a $\rho \circ \sigma$.

5. Určete σ^{-1}.
6. Určete ρ^{2011} a σ^{2011}.
7. Určete $(\rho^{-6} \circ \sigma^3)^{77}$.
8. Určete permutaci π tak, aby $\sigma \circ \pi = \rho$.

Příklad 43. Jsou dány permutace ρ, σ

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 5 & 7 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Zapište permutace ρ, σ jako součin nezávislých cyklů.
2. Rozložte permutace ρ, σ na součin transpozic a podle počtu transpozic určete jejich paritu.
3. Určete počet inverzí permutací ρ, σ a podle počtu inverzí určete jejich paritu.
4. Určete $\sigma \circ \rho$ a $\rho \circ \sigma$.
5. Určete σ^{-1}.
6. Určete ρ^{2010} a σ^{2010}.
7. Určete $(\rho^{-77} \circ \sigma^{81})^{-2}$.
8. Určete permutaci π tak, aby $\sigma^2 \circ \pi = \rho^3$.

Příklad 44. Jsou dány permutace $f, g \in \mathbb{S}_6$, $f = (5,8,7,6) \circ (1,4,2)$, $g = (1,5,2,6) \circ (2,4,7,9,5)$. Určete f^{-1}, g^{21}, $(f^{11} \circ g^{-3})^{20}$. Rozložte f na součin transpozic a určete počet transpozic této permutace.

Příklad 45. Určete všechny permutace $\pi \in \mathbb{S}_7$ tak, aby

1. $\pi^4 = (1,2,3,4,5,6,7)$
2. $\pi^2 = (1,2,3) \circ (4,5,6)$
3. $\pi^2 = (1,2,3,4)$

Výsledek.

1. $(1,3,5,7,2,4,6)$
2. $(1,3,2) \circ (4,6,5), (1,4,2,5,3,6), (1,5,2,6,3,4), (1,6,2,4,3,5)$

3. Neexistuje

Příklad 46. Určete všechny permutace $\rho \in \mathbb{S}_9$ taková, že

$$(\rho \circ (1,2,3))^2 \circ (\rho \circ (2,3,4))^2 = (1,2,3,4).$$

Řešení. Žádná taková neexistuje, na levé straně je totiž vždy sudá permutace, na pravé straně je permutace lichá.

Příklad 47. Určete všechny permutace $\rho \in \mathbb{S}_9$ taková, že

$$\rho^2 \circ (1,2) \circ \rho^2 = (1,2) \circ \rho^2 \circ (1,2).$$

Řešení. Žádná taková neexistuje, opět díky paritě.

Příklad 48. Určete znaménka daných permutací

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \dots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n & 1 & 3 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$

Výsledek.

1. 1
2. $(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

Příklad 49. Napište permutace $f = (2,3,4,5)\circ(1,3,6,8)$ a $g = (1,4,6)\circ(2,7,4,8,3)\circ(1,5)$ jako součin 10 transpozic.

Příklad 50. Popište grupu symetrií čtverce a určete všechny její podgrupy.

Příklad 51. Určete podgrupu grupy $\mathbb{S}_6$ generovanou množinou M

1. $M = \{(1,2,4,5)\}$
2. $M = \{(1,2),(5,6)\}$
3. $M = \{(1,2)\circ(4,5),(1,2)\}$
4. $M = (1,2)(3,4),(2,3)(4,5).$
5. $M = \{(1,2,3),(4,5)\}.$
6. $M = \{(1,2)\circ(3,4),\circ(5,6),(24)\}$

Příklad 52. Popište podgrupu grupy G generovanou množinou M

1. $G = \mathbb{Z}$, $M = \{36, 42\}$
2. $G = \{\mathbb{Z}_{30}\}$, $M = \{[15]_{30}, [21]_{30}\}$
3. $G = \mathbb{C}^*$, $M = \{-i\}$
4. $G = \mathbb{C}^*$, $M = \{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$
5. $G = \mathbb{Z}_{12}^{\times}$, $M = \{[5]_{12}\}$
6. $G = \mathbb{Z}_{18}^{\times}$, $M = \{[7]_{18}\}$

Příklad 53. V grupě $\mathcal{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$ určete podgrupu generovanou množinou M.

1. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
2. $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$