Definice 1. *Cyklus délky 2 se nazývá transpozice.*

Příklad 1. Rozložte cyklus (15762) na součin transpozic. Jsou víceméně dvě možnosti: $(15762) = (15) \circ (57) \circ (76) \circ (62)$ nebo $(15762) = (62) \circ (72) \circ (52) \circ (12)$.

Příklad 2. Uvažme množinu $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Definujeme $(a, b)\Delta(c, d) = (ac, ad + b)$.

Skutečně se jedná o operaci na G. (Jediný problém by byl, kdyby bylo $ac = 0$. To by znamenalo, že je $a = 0$ nebo $c = 0$, což z definice G jsou nenulová čísla.)

Operace je asociativní:

$$((u, v)\Delta(w, x))\Delta(y, z) = (uw, ux + v)\Delta(y, z) = (uwy, uwz + (ux + v)) =$$
$$(uwy, u(wz + x) + v) = (u, v)\Delta(wy, wz + x) = (u, v)\Delta((w, x)\Delta(y, z)).$$

Dále hledejme neutrální prvek, označme jej (e, f). Protože je neutrální, splňuje pro všechna (u, v):

$$(u, v) = (u, v)\Delta(e, f) = (ue, uf + v).$$

Protože dvě uspořádané dvojice jsou stejné, právě když mají stejné složky, musí platit $u = ue$ a zároveň $v = uf + v$. Tuto soustavu o neznámých e a f vyřešíme: $e = 1$, $f = 0$. Tím jsme našli kandidáta na neutrální prvek, musíme však ověřit, že jím $(e, f) = (1, 0)$ skutečně je:

$$(u, v)\Delta(1, 0) = (u \cdot 1, u \cdot 0 + v) = (u, v),$$
$$(1, 0)\Delta(u, v) = (1 \cdot u, 1 \cdot v + 0) = (u, v).$$

Abychom ukázali, že (G, Δ) je grupa, zbývá k libovolnému prvku (u, v) najít inverzi, kterou označíme (p, q). Předpokládáme, že (p, q) je inverze, a proto platí:

$$(1, 0) = (u, v)\Delta(p, q) = (up, uq + v).$$

Opět porovnáním prvních složek musí být $1 = up$ a druhých složek je $0 = uq + v$. Nezapomeňme, že hledáme dvojici (p, q). Z rovnic vidíme, že je $p = \frac{1}{u}$ a $q = \frac{-v}{u}$. (Všimněme si, že zde je potřeba, aby bylo $u \neq 0$ a vidíme, že je $p \neq 0$, tedy (p, q) je skutečně prvkem z G.) Našli jsme tak kandidáta, který by mohl být inverzním prvkem, a to skutečně je:

$$(u, v)\Delta\left(\frac{1}{u}, \frac{-v}{u}\right) = \left(u \cdot \frac{1}{u}, u \cdot \frac{-v}{u} + v\right) = (1, 0),$$
$$\left(\frac{1}{u}, \frac{-v}{u}\right)\Delta(u, v) = \left(\frac{1}{u} \cdot u, \frac{1}{u} \cdot v + \frac{-v}{u}\right) = (1, 0).$$

Zbývá se zamyslet, jestli je grupa (G, Δ) komutativní. Počítejme

$$(u, v)\Delta(w, x) = (uw, ux + v),$$
$$(w, x)\Delta(u, v) = (wu, wv + x).$$

První složky jsou zřejmě stejné, zatímco druhé složky jsou volbou $u = 1$, $x = 1$, $v = 1$ a $w = 2$ různé. Daná operace není komutativní.

Příklad 3. Doplňte tabulku operace $\otimes$ tak, aby byla asociativní.

$\otimes$	a	b	c
a	b	a	c
b			
c			

Počítejme tedy další součiny: $b \otimes a = (a \otimes a) \otimes a = a \otimes (a \otimes a) = a \otimes b = a$. Využili jsme jen asociativitu (přezávorkování) a to, že už víme, že je $b = a \otimes a$ a úplně na konci výpočtu ze zadané tabulky víme, že je $a \otimes b = a$.

Podobně je $b \otimes b = b \otimes (a \otimes a) = (b \otimes a) \otimes a = a \otimes a = b$. Úplně stejným trikem je $b \otimes c = c$.

Dále trochu obtížněji platí $c \otimes a = (b \otimes c) \otimes a = b \otimes (c \otimes a)$ a zároveň $c \otimes a = (a \otimes c) \otimes a = a \otimes (c \otimes a)$, tedy $a \otimes x = b \otimes x$. Takové x je jediné $x = c$. Tedy je $c \otimes a = c$.

Nakonec po všech výpočtech je tabulka:

$\otimes$	a	b	c
a	b	a	c
b	a	b	c
c	c	c	c

Příklad 4. Najděte podmínku, kterou musí splňovat prvky z $G = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$, aby $(\tilde{G}, \cdot)$ byla grupa. ($\cdot$ je obvyklé násobení reálných čísel a $\tilde{G}$ je podmnožina G omezená hledanou podmínkou.)