Řešený příklad

Mějme dvě nezávislé náhodné veličiny X, Y s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti na intervalu $[0,1]$. Tedy

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

a totéž platí i pro f_x. Můžeme ihned vidět, že

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x > 1, \\ x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Chceme spočítat distribuční funkci F_Z pro náhodnou proměnnou $Z = X + Y$. Na cvičení jsme díky nezávislosti X a Y užili vztah:

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y. \tag{1}$$

zbyl nám tedy jedinný integrál. Aby byl nenulový, musí určitě platit $y \in [0,1]$, protože jinak by bylo $f_Y(y) = 0$. Dále je třeba si všimnout, že

$$F_X(z-y) = \begin{cases} 1 & (z-y) > 1, \\ z-y & 0 \leq (z-y) \leq 1, \\ 0 & (z-y) < 0. \end{cases}$$

V závislosti na z jako na parametru se nám výpočet rozpadne na 4 části:

$(z < 0)$: potom pro $y \in [0,1]$ platí $(z-y) < 0$ takže $F_Z(z) = 0$

$(z > 2)$: potom pro $y \in [0,1]$ platí $(z-y) > 1$ takže $F_Z(z) = \int_0^1 F_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 1 \cdot 1\mathrm{d}y = 1$.

$(0 \leq z < 1)$: potom máme nerovnosti $y \geq 0, y \leq 1, z - y \geq 0$, takže $y \leq z$ a $y \geq 0$. Celkem tedy $F_Z(z) = \int_0^z F_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^z (z-y)\mathrm{d}y = \frac{z^2}{2}$.

$(1 < z \leq 2)$: Integrál se nyní rozpadne na dva: $F_Z(z) = \int_0^1 F_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y = \int_0^{z-1} (z-y)\mathrm{d}y + \int_{z-1}^1 1\mathrm{d}y = (z-1) + (z - \frac{z^2}{2})$.

celkem tedy

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 & z > 2, \\ (2z - 1 - \frac{z^2}{2}) & 1 < (z-y) \leq 2, \\ \frac{z^2}{2} & 0 \leq (z) \leq 1, \\ 0 & z < 0. \end{cases}$$

.