1) uz., as. ✓, kom., prázdná mn. - neutr. prvek
pologrupa s neutr. prvkem = monoid
(chybí inverze)

8) monoid

2) uz.

$(7^7)^7 \neq 7^{(7^7)}$ - není asociativní

pravý neutr. prvek 1
~~není~~ je to pouze grupoid

4) monoid

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$
"
[ ]

3) $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

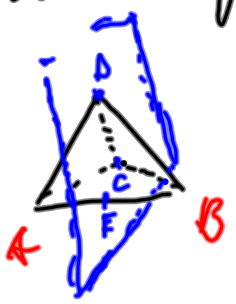
neuzavřená na operaci

$\left[\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\right] - \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix} =$

5) uz., $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ - pravý neutr. prvek, není asociativní $\begin{pmatrix}-3&0\\0&0\end{pmatrix}$

2 28-8:06

② Vhodnou symetrií můžeme zaměnit právě dva libovolné vrcholy čtyřstěnu




$\cong S_4$

③ $(1,8,4,7,9,5)\cdot(2,6,3) =$

$= (1,8)\cdot(8,4)(4,7)(7,9)(9,5)(2,6)(6,3)$

$\sigma^{2012} = (1,8,4,7,9,5)^{2012}\cdot(2,6,3)^{2012} = \mathrm{id}$

$\mathrm{id}\ (1,8,4,7,9,5)^{2010}\cdot(2,6,3)^{2010}\cdot(1,8,4,7,9,5)^{2}\cdot(2,6,3)^{2} = (1,4,9)(8,7,5)\cdot(2,3,6)$

Operaci na konečné množině můžeme „přehledně" zadat pomocí tabulky:

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a·a | a·b | a·c |
| b | b.a | bb | bc |
| c | ca | cb | cc |

$< 3^9$

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | a | a |
| b | a | a | a |
| c | a | a | a |

$\sim$

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | b | b | b |
| b | b | b | b |
| c | b | b | b |

$\sim$

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | c | c | c |
| b | c | c | c |
| c | c | c | c |

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

$\cong (\mathbb{Z}_3, +)$

Grupa je jediná.

Rovnice $x \cdot y = z$ má jediné řešení pro neznámou $x$ =>
Každý řádek i sloupec obsahuje nějakou permutaci zadaných prvků.

$x_1 \cdot y = z \Rightarrow x_1 = z \cdot y^{-1}$

$x_2 \cdot y = z \Rightarrow x_2 = z \cdot y^{-1}$

$f : (G, \square) \to (H, \Delta)$ je homomorfismus:

$$f(g_1 \square g_2) = f(g_1) \Delta f(g_2)$$

$\ln : (\mathbb{R}^+, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$

$\det : (M_{n,w}^{*}, \cdot) \to (\mathbb{R}^{*}, \cdot)$

---

Uvažme $f : x \mapsto x^3$ v $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot)$,

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 2^3 \equiv 3 \ (5)$$
$$f(3) = 3^3 \equiv (-2)^3 = -(2^3) \equiv -3 \equiv 2 \ (5)$$
$$f(4) = 4$$

$f$ je bijekce, $(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$

$f$ je automorfismus (= isomorfismus množ. do sebe)

2 28-8:45

$|S_4| = 24$

Pokud $H \subset S_4$ je podgrupou, potom $|H| / |S_4| = 24$

1, $|H| = 1 \Rightarrow$ triviální podgrupa $\{id\}$

2, $|H| = 2 \Rightarrow H = \{id, p\}$, kde $p^2 = id$.

6× $H = \{id, (a,b)\}$, $\quad$ ($\Omega = \{1,2,3,4\}$, $a \neq b \in \{1,2,3,4\}$)

3× $H = \{id, (a,b)(c,d)\}$ $\quad$ ($\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$)

2, $|H| = 3$, $\{id, p, p^2\}$, $p^3 = id$, $p \neq id$

cykly délky 3 $\quad \{id, (a,b,c), (a,c,b)\}$ $\quad$ ($\{a,b,c\} \in \{1,2,3,4\}$, $a \neq b \neq c$, $a \neq c$)

3, $|H| = 4$, $\{id, p, p^2, p^3\}$

6× $\quad p = (a,b,c,d)$ $\quad$ ($\{a,b,c,d\} = \{1,2,3,4\}$)

$V = \{id, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

- normální

$\cancel{gHg^{-1} \in H}$ ← definice normality $\Leftrightarrow$ $gH = Hg$

$$\sigma \cdot h \cdot \sigma^{-1} = \underbrace{(a_1, a_2) \cdots (a_2, a_{r+1})}_{\sigma} \cdot h \cdot \underbrace{\overbrace{(a_r, a_{r+1})) \cdots (a_1, a_2)}^{r_1}}_{\sigma^{-1}}$$

Ověřujeme pro transpozice:

$$(2,3) \cdot (1,2)(3,4) \cdot (2,3) = (1,3) \cdot (2,4) \in V$$

$V$ - normální podgrupa

---

$A_4 \subset S_4$, $S_4 / A_4 \cong \mathbb{Z}_2$

$\| $

$\{ [\text{liché permutace}], [\text{sudé permutace}] \}$

$\|$

$\{ (1,2) \cdot A_4, A_4 \}$

2 28-9:22

$|H| \,/\, |G|$ , pro lib. prvek $a \in G$ je $a^n = e$ v $G$, kde $|G| = n$

$a, a^2, a^3, \ldots, a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \ldots$
$\phantom{a, a^2, a^3, \ldots,} \; e \quad\; a \quad\; a^2, \ldots$

v $\mathbb{Z}_p^*$, $p$ prvočíslo

$|(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)|$

$a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$

Obecněji $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot)$:

Ke $k \in \mathbb{Z}_n^*$ existuje inverze $\Leftrightarrow (k, n) = 1$, největší spol. dělitel čísel $k$ a $n$

Počet čísel (přirozených) větších než nula, menších než $n \in \mathbb{N}$ udává Eulerova fce $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1})(p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2 - 1}) \cdots (p_s^{\alpha_s} - p_s^{\alpha_s - 1})$$
$$= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right)$$

2 28-9:38