

První sada domácích úloh k přednášce Matematika IV

Příklad 1. Rozhodněte o následujících množinách a operacích, jaké tvoří struktury (grupoid, pologrupa, zda existují levé (pravé) neutrální prvky, grupa):

1. podmnožiny množiny přirozených čísel spolu s operací sjednocení,
2. kladná reálná čísla s operací \square , kde $x \square y := x^y$,
3. množina všech invertibilních matic 2×2 nad \mathbb{R} spolu se sčítáním,
4. množina všech matic 2×2 nad \mathbb{R} spolu s násobením matic,
5. množina všech matic 2×2 nad \mathbb{R} spolu s odčítáním matic,
6. množina všech invertibilních matic 2×2 nad \mathbb{Z}_2 s násobením matic,
7. množina všech invertibilních matic 2×2 nad \mathbb{R} spolu se sčítáním matic,
8. množina \mathbb{Z} spolu s operací odčítání,
9. množina \mathbb{Z}_8 spolu s operací násobení (modulo 8).

Svá tvrzení zdůvodněte (proč je něco např. pouze grupoid a není pologrupa ...).

Příklad 2. Určete grupu symetrií pravidelného čtyřstěnu (popište všechny symetrie). Kolik má prvků? Je tato grupa komutativní? Je izomorfní (tzn. až na pojmenování prvků stejná) nějaké známé grupě?

Příklad 3. Rozložte na součin transpozic následující permutaci:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Spočtete σ^{2012} .